2.13 Хенкинови системи. Специални константи

Ще казваме, че една формална система е хенкинова, ако за всяка затворена формула $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ на системата, съществува затворен терм $\mathbf{a}$, такъв че формулата $\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ е теорема на системата. С други думи, една формална система е хенкинова, ако за всяко едноместно свойство $\mathbf{A}$, знаем пример $\mathbf{a}$, за който сме сигурни, че ако изобщо нещо има свойството $\mathbf{A}$, то обезателно $\mathbf{a}$ има това свойство. Като цяло няма естествени примери за хенкинови системи, освен системи аксиоматизиращи крайни светове[5] (като например конкретни крайни групи, пръстени или полета). В различни области на математиката, когато не можем (по една или друга причина) да дадем пример за нещо, имащо дадено свойство, ние добавяме изкуствено елемент и постулираме, че той има това свойство. Например, добавяме i към реалните числа и постулираме, че $i^2 = -1$. Сега ще направим нещо подобно, като ще осигурим подходяща константа за всяка затворена формула $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$, вкючително и за формулите, съдържащи новодобавени константи.

Нека $\mathcal{F}$ е формална система. Ако $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ е затворена формула изградена от символите на $\mathcal{F}$ и (евентуално) специални константи на $\mathcal{F}$, то символът $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ е специална константа на $\mathcal{F}$ за формулата $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$. Нивото на $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ е $n+1$, където n е максималното ниво на специалните константи, участващи в $\mathbf{A}$ (в случай, че в $\mathbf{A}$ няма специални константи, то n е 0). Така специалните константи са „двумерни“ синтактични обекти, представляващи символът κ индексиран със затворена екзистенциална формула. Нивото на специалната константа указва броят на вложените индекси в записа на κ. Например,

$$\kappa_{\exists y(y+0=S0)}, \quad \kappa_{\exists z \forall x(x+z<\kappa_{\exists z(z.0\neq 0)})}$$

са специални константи на PA съответно от ниво 1 и 2.

Ако $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ е специална константа, то формулата

$$\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}]$$

ще наричаме специална аксиома за $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$. Интуитивно, специалната аксиома за $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ казва, че $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ е обектът (от света, който разглеждаме), за който е най-малко вероятно да няма свойството $\mathbf{A}$. Нека с $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки всички специални константи (от всички нива $n \geqslant 1$). Съгласно теоремата за константите, $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. Нека Γ е множеството от всички специални аксиоми. Ясно е, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е хенкинова формална система.

Теорема 2.40. $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно хенкиново разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Трябва само да докажем, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$ и нека $\vdash_{\mathcal{F}'[\Gamma]} \mathbf{A}$. Съгласно теоремата за редукцията

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A},$$

където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ са специални аксиоми. Предвид теоремата за тавтологиите можем да считаме, че $\mathbf{A}_1$ се отнася за специална константа $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ от възможно най-високо ниво. Тогава $\mathbf{A}_1 \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}]$ и $\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}$ не се среща в нито една от формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}$. Тогава, съгласно теоремата за константите, ако $\mathbf{y}$ е нова променлива, то

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$$

Оттук и (П$\exists$) (тъй като $\mathbf{y}$ не участва във формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}$) получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists\mathbf{y}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Съгласно пренексните операции (и тъй като $\mathbf{y}$ не участва в $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists\mathbf{y}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \leftrightarrow (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]).$$

Оттук и теоремата за еквивалентната замяна

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Но $\exists\mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$ е вариант на $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}].$$

[5] Това ще бъде обосновано по-нататък в курса

Следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Повтаряйки това разсъждение още $n-1$ пъти получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.$$

Следователно $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно хенкиново разширение на $\mathcal{F}$.

□

2.14 Теорема на Хилберт-Акерман

Ако $\mathcal{F}$ е формална система, то с $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ ще означаваме езикът на $\mathcal{F}$ обогатен със специалните константи на $\mathcal{F}$.

Твърдение 2.41. Ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, то всеки затворен частен случай на $\mathbf{A}$ от $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ е тавтологично следствие на затворени частни случаи в $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ на аксиомите на $\mathcal{F}$ и специалните аксиоми за $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ е затворен частен случай (във $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$) на $\mathbf{A}$. Ще докажем твърдението с индукция по извода в $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}$ е аксиома на $\mathcal{F}$, твърдението е очевидно. Ако $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, където $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\mathbf{A}'$ е тавтологично следствие $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ за подходящи затворени частни случаи $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ съответно на $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ и твърдението следва от индукционното предположение.

Накрая, нека $\mathbf{A}$ се получава от теоремата $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ чрез (П∃). Тогава $\mathbf{A}' \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{B}' \to \mathbf{C}'$ за подходящ частен случай $\mathbf{B}' \to \mathbf{C}'$ на $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$. При това, $\mathbf{C}'$ е затворена, а $\mathbf{B}'$ е със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$. Тогава $\mathbf{B}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{r}] \to \mathbf{C}'$, където $\mathbf{r}$ е специалната константа за $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}'$, е затворен частен случай на $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$. Сега твърдението следва от индукционното предположение и това, че $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}' \to \mathbf{C}'$ е тавтологично следствие на $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}' \to \mathbf{B}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{r}]$ и $\mathbf{B}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{r}] \to \mathbf{C}'$.

□

Забележка.

1. Ако $\mathbf{A}$ е затворена, то $\mathbf{A}$ е единственият частен случай на $\mathbf{A}$.
2. Горната теорема ни казва, че с помощта на специалните константи и аксиоми можем до известна степен да елиминираме употребата на правилото (П∃).

Теорема 2.42 (Хилберт-Акерман)**.** Ако $\mathcal{F}$ е формална система, имаща само безкванторни нелогически аксиоми, то $\mathcal{F}$ е противоречива тогава и само тогава, когато някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогически аксиоми на $\mathcal{F}$ е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

Доказателство. Ясно е, че ако някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогически аксиоми на $\mathcal{F}$ е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството, то $\mathcal{F}$ е противоречива.

Нека сега $\mathcal{F}$ е противоречива. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} x \neq x$ и съгласно предното твърдение $c \neq c$ (където c е произволна константа от $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$) е тавтологично следствие на затворени в $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ частни случаи на аксиомите на $\mathcal{F}$ и специалните аксиоми на $\mathcal{F}$. Следователно съществува тавтология, която е дизюнкция от отрицания на затворени в $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ частни случаи на аксиоми на $\mathcal{F}$ и специални аксиоми на $\mathcal{F}$. Ще докажем, как да се освободим последователно от аксиомите за субституцията и специалните аксиоми. Така ще получим тавтология, която е дизюнкция от отрицания на затворени частни случаи в $\mathcal{L}_c(\mathcal{F})$ на аксиоми за равентството и нелогически аксиоми на $\mathcal{F}$. Замествайки в тази дизюнкция специалните контстанти с нови променливи, получаваме дизюнкция от отрицания на частни случаи (в езика на $\mathcal{F}$) на аксиоми за равентството и нелогически аксиоми на $\mathcal{F}$, което е и твърдението на теоремата.

Нека $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}$ е формула с възможно най-много квантори, участваща в тавтолологията (като подформула). Тогава, тъй като аксиомите за равенството и нелогическите аксиоми на $\mathcal{F}$ са безкванторни, то $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}$ е част или от аксиома за субституцията $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}$, или от специалната аксиоми $\exists \mathbf{x} \mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{B}}]$. Тогава тавтологията има вида

$$\neg(\exists \mathbf{x} \mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{B}}]) \vee \neg(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}_1] \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}_m] \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}) \vee \neg \mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg \mathbf{A}_n,$$

където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са частни случаи на аксиоми, в които $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}$ не участва. Допълнително ще предполагаме, че сме избрали $\exists \mathbf{x} \mathbf{B}$, така че $\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{B}}$ е от възможно най-високо ниво.

Заместваме формулите $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ с $\mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{x}\mathbf{B}}]$ (което не променя $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$) и получаваме отново тавтология

$$\neg(\mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]) \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]) \vee \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n.$$

Тъй като $\mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]$ е аксиома, можем да премахнем първият дизюнкт, и значи имаме тавтология

$$\neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}]) \vee \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n. \qquad (*)$$

Нека за всеки израз α, с $\alpha^{(i)}$ означим израза, който се получава замествайки, включително в индексите на специалните контастанти, $\kappa_{\exists\mathbf{xB}}$ с $\mathbf{a}_i$. При тази замяна, специална константа се превръща отново в специална константа. Ясно е, че затворените частните случаи на аксиомите за равенството и нелогическите аксиоми на $\mathcal{F}$ се превръщат съответно в аксиоми за равенството и нелогически аксиоми на $\mathcal{F}$. При това (поради избора на $\exists\mathbf{xB}$), ако $\exists\mathbf{yC}$ се среща в тавтологията и има същия брой квантори като $\exists\mathbf{xB}$, то $\mathbf{C}^{(i)} \equiv \mathbf{C}$.

Така получаваме m тавтологии

$$\begin{aligned}
&\neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1^{(1)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1]) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m^{(1)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1]) \vee \neg\mathbf{A}_1^{(1)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(1)}\\
&\neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1^{(2)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_2]) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m^{(2)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_2]) \vee \neg\mathbf{A}_1^{(2)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(2)}\\
&\vdots\\
&\neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1^{(m)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m]) \vee \ldots \vee \neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m^{(m)}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m]) \vee \neg\mathbf{A}_1^{(m)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(m)},
\end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_1] \to (\neg\mathbf{A}_1^{(1)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(1)})\\
&\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_2] \to (\vee\neg\mathbf{A}_1^{(2)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(2)})\\
&\vdots\\
&\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_m] \to (\neg\mathbf{A}_1^{(m)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(m)})
\end{aligned}$$

също са тавтологии. Оттук, $(*)$ и тавтологиите

$$\neg(\mathbf{B_x}[\mathbf{a}_i] \to \mathbf{B_x}[\kappa_{\exists\mathbf{xB}}] \to \mathbf{B_x}[\mathbf{a}_i], \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

получаваме тавтологията

$$\neg\mathbf{A}_1^{(1)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(1)} \vee \neg\mathbf{A}_1^{(2)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(2)} \vee \neg\mathbf{A}_1^{(m)} \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n^{(m)} \vee \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n.$$

При това, ако $\exists\mathbf{yC}$ участва в тази тавтология, то или тази формула съдържа по-малко квантори от $\exists\mathbf{xB}$, или участва в първоначалната тавтология.

□

2.15 Специални аксиоми за равенството

Специална аксиома за равенството ще наричаме всяка формула от вида

$$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \to \kappa_{\exists\mathbf{xA}} = \kappa_{\exists\mathbf{xB}},$$

където $\exists\mathbf{xA}$ и $\exists\mathbf{xB}$ са затворени формули.

Теорема 2.43. Формалната система, която се получава от формалната система $\mathcal{F}$, добавяйки всички специални контстани, специални аксиоми и специални равенства на $\mathcal{F}$, е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека, ако $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ са специални константи, то с $\mathcal{F}[\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n]$ означим формалната система, получаваща се от $\mathcal{F}$, добавяийки специалните константи $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, специалните аксиоми за тях и специалните аксиоми за равенството, в които заключението е равнество между тези специални константи. Достатъчно е да покажем, че ако $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$, то

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n]} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_{n-1}]} \mathbf{A}$$

Ще докажем, горната еквивалентност в случая, в който нивото на $\mathbf{r}_i$ е по-малко или равно на нивото на $\mathbf{r}_j$, за $i < j$. Трябва да докажем, само посоката отляво надясно. За целта нека $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n]} \mathbf{A}$. Нека с $\mathcal{F}'$ означим формалната система, получаваща се от $\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{n-1}]$ добавяйки константата $\mathbf{r}_n$. Нека $\mathbf{r}_i$ е специалната константа $\kappa_{\exists \mathbf{x}_i \mathbf{B}_i}$. Първо ще докажем, че за всяко i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ако $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_n$, то $\mathcal{F}'[\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n, \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n)]$ е разширение на $\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n]$. Имаме

$$\dfrac{\dfrac{\forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n)}{\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n}}{\dfrac{\mathbf{B}_{i\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n] \leftrightarrow \mathbf{B}_{n\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n]}{\mathbf{B}_{i\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_i] \leftrightarrow \mathbf{B}_{n\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n]}\ \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n \qquad\qquad \exists \mathbf{x}\mathbf{B}_i \leftrightarrow \exists \mathbf{x}\mathbf{B}_n}$$

Оттук, теоремата за еквивалентната замяна и специалната аксиома $\exists \mathbf{x}\mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_{i\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_i]$ получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'[\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_n, \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{C}_i)]} \exists \mathbf{x}\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_{n\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n].$$

От друга страна, всяка специална аксиома за равенството $\forall \mathbf{x}_n(\mathbf{B}_j \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_n$ (каквато бихме имали, ако $\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}_i$), може да се получи от специалната аксиома за равенството $\forall \mathbf{x}_i(\mathbf{B}_j \leftrightarrow \mathbf{B}_i) \to \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i$ (която е аксиома на $\mathcal{F}'$) и теоремите за еквивалентната замяна и за равенството.

Сега, щом $\mathbf{A}$ е теорема на $\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n]$, то $\mathbf{A}$ е теорема на $\mathcal{F}'[\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n, \forall \mathbf{x}_n(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n)]$ и значи съгласно теоремата за дедукцията

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{A}.$$

Тъй като за $\mathbf{r}_n$ няма нелогически аксиоми

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{r}_i = \mathbf{y} \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{A},$$

където $\mathbf{y}$ е нова променлива и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{A}.$$

Оттук и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{A}.$$

и значи, отново по теоремата за тавтологиите,

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \neg(\forall \mathbf{x}(\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}_n) \to \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n) \to \mathbf{A}.$$

От това, че $\mathbf{A}$ е теорема на $\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n]$ и теоремата за редукцията, следва че

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{D}_1 \to \dots \to \mathbf{D}_k \to (\exists \mathbf{x}\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_{n\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n]) \to \mathbf{A},$$

където $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_k$ са специални аксиоми за равенството, касаещи $\mathbf{r}_n$. От доказаното по-горе следва, че

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \neg\mathbf{D}_i \to \mathbf{A}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists \mathbf{x}\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_{n\,\mathbf{x}}[\mathbf{r}_n]) \to \mathbf{A}.$$

Оттук и доказателството на консервативността на разширението с помощта на специални аксиоми, следва

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{n-1}]} \mathbf{A}.$$

□

2.16 Теорема на Ербран

Ще казваме, че една затворена формула е екзистенциална, ако има вида $\exists \mathbf{x}_1 \dots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{B}$, където $\mathbf{B}$ е безкванторна. $\mathbf{B}$ наричаме матрица на екзистенциалната формула.

Твърдение 2.44. Нека $\mathcal{F}$ е формална система без нелогически аксиоми. Тогава всяка затворена екзистенциална формула е теорема на $\mathcal{F}$ тогава и само тогава, когато съществува дизюнкция от частни случаи на матрицата на формулата, която е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

Доказателство. Нека $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{B}$ е затворена екзистенциална формула с матрица $\mathbf{B}$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \mathcal{F}[\neg \mathbf{A}] \text{ е противоречива} \iff \mathcal{F}[\neg \mathbf{B}] \text{ е противоречива.}$$

От друга страна, съгласно теоремата на Хилберт-Акерман, $\mathcal{F}[\neg \mathbf{B}]$ е противоречива тогава и само тогава, когато съществува дизюнкция от отрицания от частни случаи на $\neg \mathbf{B}$ (а значи и дизюнкция от частни случаи на $\neg \mathbf{B}$), която е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

□

Нека отбележим, че ако $\mathbf{r}$ е специалната константа за $\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{B}$, то $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{r}] \to \forall \mathbf{x} \mathbf{B}$ е тавтологично следствие на специалната аксиома за $\mathbf{r}$.

Нека $\mathcal{F}$ е формална система. С всяка затворена пренексна формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ свързваме затворена пренексна екзитенциална формула $\mathbf{A}_H$ по следната схема: Ако $\mathbf{A}$ е екзистенциална, то $\mathbf{A}_H$ е $\mathbf{A}$. В противен случай $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y} \mathbf{B}$, $n \geqslant 0$. Въвеждаме нов n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и полагаме $\mathbf{A}^{\#} \equiv \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{B}_{\mathbf{y}}[f \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$. Ако тази не е екзистенциална, то образуваме $\mathbf{A}^{\#\#}$, $\mathbf{A}^{\#\#\#}$, ..., докато не достигнем до екзистенциална формула $\mathbf{A}_H$.

Теорема 2.45 (на Ербран)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система без нелогически аксиоми. Тогава $\mathbf{A}$ е теорема на $\mathcal{F}$, тогава и само тогава, когато някоя дизюнкция от частни случаи на матрицата на $\mathbf{A}_H$ е тавтологично следствие на частни случаи на аксиоми за равенството.

Доказателство. Нека $\mathcal{F}'$ е формалната система, получаваща се от $\mathcal{F}$, добавяйки функционалните символи, участващи в образуването на $\mathbf{A}_H$. Ще докажем, че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_H$$

откъдето твърдението на теоремата ще следва от Твърдение 2.44.

За посоката от ляво надясно, да забележим, че $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$ (тъй като $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$). Освен това, $\vdash_{\mathcal{F}'} \forall \mathbf{y} \mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\mathbf{y}}[f \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ (теорема за субституцията) и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\#}$ (съгласно ($\Pi\exists\exists$)) и аналогично $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{\#} \to \mathbf{A}^{\#\#}$, ...

За обратната посока, нека $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_H$ и за простота предположим, че $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} \forall \mathbf{w} \mathbf{B}$, където $\mathbf{B}$ е безкванторна със свободни променливи $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$. За опростим допълнително означенията, когато заместваме четирите променливи в $\mathbf{B}$, ще изпускаме долните индекси при извършването на субституция в $\mathbf{B}$. Така

$$\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} \forall \mathbf{w} \mathbf{B}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}]$$

и

$$\mathbf{A}_H \equiv \exists \mathbf{x} \exists \mathbf{z} \mathbf{B}[\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z}, \mathbf{gxz}]$$

Въвеждаме още следните означения. За произволни затворени термове $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ на $\mathcal{F}'$, с $\mathbf{r}_{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{s}_{\mathbf{ab}}$ ще означаваме съответно специалните константи за формулите

$$\exists \mathbf{y} \neg \exists \mathbf{z} \forall \mathbf{w} \mathbf{B}[\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}] \qquad \text{и} \qquad \exists \mathbf{w} \neg \mathbf{B}[\mathbf{a}, \mathbf{r}_{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \mathbf{s}_{\mathbf{ab}}].$$

От $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_H$ и Твърдение 2.44 следва, че за подходящи термове $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, ..., $\mathbf{b}_k$ (необезателно затворени) на $\mathcal{F}'$ формулата

$$\mathbf{B}[\mathbf{a}_1, \mathbf{fa}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{ga}_1\mathbf{b}_1] \vee \cdots \vee \mathbf{B}[\mathbf{a}_k, \mathbf{fa}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{ga}_k\mathbf{b}_k] \qquad (*)$$

е тавтологично следствие на частни случаи

$$\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m \qquad (**)$$

на аксиоми за равенството. Освобождаваме, се от срещанията на $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в $(*)$ и $(**)$ по следната схема:

1. Първо заместваме всички свободни променливи във $(*)$, $(**)$ със затворени термове (например специални константи). Новополучените формули са затворени.

2. В $(*)$ и $(**)$ търсим срещане на терм от вида $\mathbf{fa}$ или $\mathbf{gab}$, където $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не съдържат нито $\mathbf{f}$, нито $\mathbf{g}$. Ако такива няма, то тогава $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ не се съдържат в разглежданите формули. В противен случай заместваме всички срещания на $\mathbf{fa}$ с $\mathbf{r}_{\mathbf{a}}$ и на $\mathbf{gab}$ с $\mathbf{s}_{\mathbf{ab}}$, като по този начин броят на срещанията на символите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ намалява.

3. Повтаряме горната стъпка, докато не премахнем всички срещания на $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$.

Накрая сме получили

$$\mathbf{B}[\mathbf{a}'_1,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_1},\mathbf{b}'_1,\mathbf{s}_{\mathbf{a}'_1\mathbf{b}'_1}] \vee \cdots \vee \mathbf{B}[\mathbf{a}'_k,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_k},\mathbf{b}'_k,\mathbf{s}\mathbf{a}'_k\mathbf{b}'_k] \qquad (*)'$$

и

$$\mathbf{C}'_1,\dots,\mathbf{C}'_m \qquad (**)'$$

Тъй като заместванията не променят разпределението на логическите връзки, то $(*)'$ е тавтологично следствие на $(**)'$. Ще докажем, че $\mathbf{A}$ е теорема на системата $\mathcal{F}_S$, която е обогатяването на $\mathcal{F}$ със специалните константи, специалните аксиоми и специалните аксиоми за равенството. Тъй като $\mathcal{F}_S$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$, то оттук ще следва $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Първо ще докажем, че $\vdash_{\mathcal{F}_S} \mathbf{C}'_i$. Ако $\mathbf{C}_i$ е частен случай на аксиома за равенството, която не се отнася за $\mathbf{f}$ или $\mathbf{g}$, то $\mathbf{C}'_i$ е частен случай на същата аксиома за равенството и значи е теорема на $\mathcal{F}_S$. Ако $\mathbf{C}_i$ е частен случай на аксиомата $x_1 = y_1 \to \mathbf{f}x_1 = \mathbf{f}y_1$, то $\mathbf{C}'_i$ има вида $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'' \to r_{\mathbf{a}'} = r_{\mathbf{a}''}$. В $\mathcal{F}_S[\mathbf{a}' = \mathbf{a}'']$ имаме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}' = \mathbf{a}''}{\neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}] \leftrightarrow \neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}]}}{\forall\mathbf{y}(\neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}] \leftrightarrow \neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}])} \qquad \forall\mathbf{y}(\neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}] \leftrightarrow \neg\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'',\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}]) \to \mathbf{r}_{\mathbf{a}'} = \mathbf{r}_{\mathbf{a}''}}{\mathbf{r}_{\mathbf{a}'} = \mathbf{r}_{\mathbf{a}''}}$$

и следователно $\vdash_{Fc_S} \mathbf{C}'_i$ съгласно теоремата за дедукцията. Ако $\mathbf{C}_i$ е частен случай на аксиомата $x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \mathbf{g}x_1x_2 = \mathbf{g}y_1y_2$, то $\mathbf{C}'_i$ има вида $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'' \to \mathbf{b}' = \mathbf{b}'' \to \mathbf{s}_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = \mathbf{s}_{\mathbf{a}''\mathbf{b}''}$. В $\mathcal{F}_S[\mathbf{a}' = \mathbf{a}'', \mathbf{b}' = \mathbf{b}'']$ имаме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}' = \mathbf{a}'' \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b}'' \quad \dfrac{\vdots}{\mathbf{r}_{\mathbf{a}'} = \mathbf{r}_{\mathbf{a}''}}}{\mathbf{B}[\mathbf{a}', r_{\mathbf{a}'}, \mathbf{b}', \mathbf{w}] \leftrightarrow \mathbf{B}[\mathbf{a}'', r_{\mathbf{a}''}, \mathbf{b}'', \mathbf{w}]}}{\forall\mathbf{w}\,(\mathbf{B}[\mathbf{a}', r_{\mathbf{a}'}, \mathbf{b}', \mathbf{w}] \leftrightarrow \mathbf{B}[\mathbf{a}'', r_{\mathbf{a}''}, \mathbf{b}'', \mathbf{w}])} \qquad \forall\mathbf{w}(\mathbf{B}[\mathbf{a}', r_{\mathbf{a}'}, \mathbf{b}', \mathbf{w}] \leftrightarrow \mathbf{B}[\mathbf{a}'', r_{\mathbf{a}''}, \mathbf{b}'', \mathbf{w}]) \to \mathbf{s}_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = \mathbf{s}_{\mathbf{a}''\mathbf{b}''}}{\mathbf{s}_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = \mathbf{s}_{\mathbf{a}''\mathbf{b}''}}$$

и следователно $\mathcal{F}_S\mathbf{C}'_i$ съгласно теоремата за дедукцията.

Така всяка формула от $(**)'$ е теорема на $\mathcal{F}_S$. Сега от забележката, направена преди формулировката на теоремата имаме

$$\begin{aligned}
&\vdash_{\mathcal{F}_S} \quad \mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{b}'_i,\mathbf{s}_{\mathbf{a}_i\mathbf{b}'_i}] \to \forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{b}'_i,\mathbf{w}]\\
&\vdash_{\mathcal{F}_S} \quad \forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{b}'_i,\mathbf{w}] \to \exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{z},\mathbf{w}]\\
&\vdash_{\mathcal{F}_S} \quad \exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{z},\mathbf{w}] \to \forall\mathbf{y}\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}]\\
&\vdash_{\mathcal{F}_S} \quad \forall\mathbf{y}\exists\mathbf{z}\forall\mathbf{w}\mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}] \to \mathbf{A}
\end{aligned}$$

и следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}_S} \mathbf{B}[\mathbf{a}'_i,\mathbf{r}_{\mathbf{a}'_i},\mathbf{b}'_i,\mathbf{s}_{\mathbf{a}_i\mathbf{b}'_i}] \to \mathbf{A}.$$

Сега $\vdash_{\mathcal{F}_S} \mathbf{A}$ следва от теоремата за тавтологиите.

$\square$