Семестриално контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 26.11.2023 г.

Име: .... ФN°: .... Група: ....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
от максимално	20	10	30	20	30	30	140

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

Зад. 1 Професор Дълбоков казва, че разполага с доказателство, че ако m и n са естествени числа, то $m = n$. Функцията max се дефинира по класическата дефиниция: за всеки $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\max(m, n) = \begin{cases} m, & \text{ако } m \geqslant n \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Нека $P(t)$ е следният предикат с домейн $\mathbb{N}$:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big((\max(m, n) = t) \rightarrow (m = n)\big)$$

Професорът доказва $P(t)$ с индукция по t. Базовият случай е $t = 0$ и наистина $P(0)$ е очевидно вярно. Индуктивното предположение е, че $P(t)$ е истина за някакво t. Разглеждаме $P(t+1)$. Нека $\max(m, n) = t + 1$. Нека $m' = m - 1$ и $n' = n - 1$. Но тогава очевидно $\max(m', n') = t$. От това и индуктивното предположение следва, че $m' = n'$. Щом $m' = n'$, в сила е $m = n$. В заключение, $P(t)$ е истина за всяко естествено t.

Какво бихте казали за това доказателство?

Зад. 2 Нека $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ и $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ са релации, дефинирани по следния начин.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(aRb \leftrightarrow a - b \text{ е просто число})$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(aSb \leftrightarrow a - b \text{ е четно число})$$

Отговорете

5 т. • дали R е релация на еквивалентност и

5 т. • дали S е релация на еквивалентност.

Зад. 3 Дадено е непразно множество S. Нека $f : S \rightarrow S$ и $g : S \rightarrow S$. Тези функции са такива, че

$$\forall x \in S\ \big(f(x) = g(f(f(x)))\ \wedge\ g(x) = f(g(f(x)))\big)$$

Професор Дълбоков твърди, че $f = g$. Прав ли е професорът?