Семестриално контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 26.11.2023 г.

Име: .... Ф№: .... Група: ....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
от максимално	20	10	30	20	30	30	140

Зад. 4 Нека $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$, нека a_n е броят на редиците с дължина n, чиито елементи са от S и които нямат съседни четни числа.

10 т. • Съставете рекурентно уравнение за a_n.

10 т. • Решете уравнението.

Зад. 5 Нека D_n е броят на пермутациите на елементите на $\{1, 2, \ldots, n\}$, в които нито един елемент не си е на мястото. Забележете, че $D_0 = 1$, защото за празната пермутация е вярно, че нито един елемент не си е на мястото. От друга страна, $D_1 = 0$, защото има една единствена пермутация на елементите на $\{1\}$ и в нея има елемент—а именно, единствената единица—който си е на мястото. Докажете с комбинаторни разсъждения, че за всяко $n \geqslant 2$ е вярно, че $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Упътване: разгледайте някоя позиция на такава пермутация. БОО, разгледайте позиция 1. *Кои числа може да се намират там? По отношение на едно от тях, разгледайте позицията, равна на неговата големина, и направете подходящо разбиване на множеството от възможните стойности за нея.*

Бонус 15 точки: Докажете, че същата рекурентна зависимост е в сила и за факториела. Но очевидно $D_n < n!$ за всички достатъчно големи стойности на n, понеже $n!$ брои пермутациите без ограничения, които са повече от тези, в които нито един елемент не си е на мястото. Как обяснявате това, че хем $D_n < n!$, хем и двете удовлетворяват същата рекурентна зависимост?

Зад. 6 Нека k, m и n са естествени числа, такива че $k \leqslant m \leqslant n$. Докажете с комбинаторни съображения тъждеството

$$\binom{n-k}{m-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-i}{m}$$

Упътване: Нека $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Фиксирайте някакво* $U \subseteq A$, *такова че* $|U| = k$. *При това положение, измислете множество* X, *чиято мощност е лявата страна на тъждеството. Покажете, че дясната страна на тъждеството също е равна на* $|X|$, *използвайки принципа на включването и изключването.*