2.9 Разширения. Разширения с помощта на дефиниция на предикатен символ

Нека $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ са формални системи. Ще казваме, че езикът $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ на $\mathcal{F}$ *разширява* езика на $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ на $\mathcal{F}$ и ще пишем $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, ако всеки нелогически символ на $\mathcal{F}$ е нелогически символ на $\mathcal{F}'$. От дефиницията на термове и формули следва, че ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, то всеки терм и всяка формула на $\mathcal{F}$ са съответно терм и формула на $\mathcal{F}'$. В частност двата езика съвпадат тогава и само тогава, когато е изпълнено едновременно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$ и $\mathcal{L}(\mathcal{F}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Тъй като логическите аксиоми на една формална система се определят еднозначно от формулите на системата, то ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, то всяка логическа аксиома на $\mathcal{F}$ е логическа аксиома и на $\mathcal{F}'$. При това, ако $\mathcal{F}'$ съдържа поне един нелогически символ, непринадлежащ на $\mathcal{F}$, то в $\mathcal{F}'$ има безброй много логически аксиоми, които не са логически аксиоми на $\mathcal{F}$.[1]

Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ и ще пишем $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$ и всяка нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$ е теорема на $\mathcal{F}'$.

Твърдение 2.29. Нека $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

Доказателство. Ще проведем индукция по извода на теоремите в $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}$ е логическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\mathbf{A}$ е логическа аксиома и на $\mathcal{F}'$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. Ако $\mathbf{A}$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$ по условие. Накрая, ако $\mathbf{A}$ се получава от $\mathbf{B}$ (и евентуално $\mathbf{C}$) чрез някое от правилата (ПР), (ПС), (ПА), (ПО) и (П$\exists$), и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$ (съответно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C}$), то съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{B}$ (съответно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{C}$) и следователно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. $\square$

Ще казваме, че разширението $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ е *консервативно*, ако за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ от $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$ следва $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. С други думи, разширението $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ е консервативно, ако $\mathcal{F}'$ не може да докаже нищо ново по отношение на $\mathcal{F}$. От теоремата за контстантите следва, че добавянето на нови константи (без нелогически аксиоми за тях) е консервативно разширение.

Едно от важните действия, които извършваме в математиката е да даваме нови дефиниции. Обичайно, дефинираме нови свойства или нови операции, като тези дефиниции са логически свързани със свойствата и операциите, които разглеждаме. Така например за естествените числа, едно ат първите свойства, което се дефинира е „делимост“, а именно

$$x \mid y \iff \exists z(x = y.z).$$

От формална гледна точка бихме могли да разглеждаме горното като дефиниция на съкращение в PA, т.е. ще пишем $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ вместо $\exists z(\mathbf{a} = \mathbf{b}.z)$ за всеки избор на термове $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Да забележим обаче, че ако $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ съдържа променливата z, то смисълът на формулата $\exists z(\mathbf{a} = \mathbf{b}.z)$ се променя. Например, ако $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \equiv z$, то формулата приема вида $\exists z(z = z)$, което е теорема (тъй като е следствие от теоремата за тъждеството и аксиома за субституцията) и не изразява „z дели z“.

По тази причина, вместо да въвеждаме предикатни символи като съкращения, ще добавяме тези символи към езика на формалната система, а за да дадем връзката между новите и старите символи ще добяваме нови нелогически аксиоми.

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред. Нека $\mathbf{D}$ е формула на $\mathcal{F}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Нека $\mathbf{p}$ е нов n-местен функционален символ. Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ чрез дефиниране на предикатния символ $\mathbf{p}$ с помощта на формулата $\mathbf{D}$, ако $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки предикатния симол $\mathbf{p}$ и дефиниращата аксиома

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}.$$

Нашата основна цел е да докажем, че $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$, като при това за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ съществува формула $\mathbf{A}^*$ на $\mathcal{F}$, такава че

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$$

и

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

Формулата $\mathbf{A}^*$ ще наричаме превод на $\mathbf{A}$ в $\mathcal{F}$. Така от гледна точка на $\mathcal{F}'$ всяка формула изказва същото, каквото и нейния превод, като при това $\mathcal{F}'$ доказва една формула тогава и само тогава, когато оригиналната система доказва превода ѝ.

[1] Ако $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}'$, която не е формула на $\mathcal{F}$, то $\neg(\underbrace{\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \vee \cdots \vee \mathbf{A}}_{n}) \vee (\underbrace{\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \vee \cdots \vee \mathbf{A}}_{n})$ за $n > 0$ са различни аксиоми на $\mathcal{F}'$, които не са формули (а значи и аксиоми) на $\mathcal{F}$.

За да дефинираме превод на една формула подхождаме по следния начив. Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. Избираме вариант $\mathbf{D}'$ на $\mathbf{D}$, в който нито една от свързаните променливи не участва във формулата $\mathbf{A}$. Образуваме $\mathbf{A}^*$, замествайки всяко срещане на атомарна формула от вида $\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ с формулата $\mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$.[2]

Твърдение 2.30. $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$.

Доказателство. Предвид теоремата за варианта

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D}'$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}'.$$

Оттук и правилото за замяната

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n \leftrightarrow \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

за всеки избор на термове $\mathbf{a}_1,\ldots, \mathbf{a}_n$, участващи в $\mathbf{A}$. Сега твърдението следва от теоремата за еквивалентната замяна.

□

Твърдение 2.31. Нека $\mathbf{A}_1,\ldots, \mathbf{A}_n$ е доказателство в $\mathcal{F}'$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (където всички преводи са направени с един и същи вариант на $\mathbf{D}$).

Доказателство. Ще извършим доказателството с индукция по i. Нека първо $\mathbf{A}_i$ е логическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е съждителна аксиома, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \neg\mathbf{A}^* \vee \mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е съждителна аксиома на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за субституцията, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}^*[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е аксиома за субституцията на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството, некасаеща символа $\mathbf{p}$, то $\mathbf{A}_i$ е формула на $\mathcal{F}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \ldots x_n \to \mathbf{p}y_1 \ldots y_n,$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[y_1 \ldots y_n],$$

което е теорема на $\mathcal{F}$, съгласно теоремата за равентството.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\mathbf{A}_i$ не съдържа символа $\mathbf{p}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D},$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{D}' \leftrightarrow \mathbf{D}$$

и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно теоремата за варианта.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1},\ldots,\mathbf{A}_{j_k}$ $(j_1, \ldots, j_k < i)$. Тъй като (при използването на един и същи варинат на $\mathbf{D}$ за получаването на превода) е в сила $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \equiv \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$ и $(\neg\mathbf{A})^* \equiv \neg\mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}_i^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1}^*,\ldots,\mathbf{A}_{j_k}^*$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{j_s}$ за $1 \leqslant s \leqslant k$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i$.

Накрая нека $\mathbf{A}_i$ се получава от $\mathbf{A}_j$ $(j < i)$ чрез (П∃). Тогава $\mathbf{A}_i \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}_i^* \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Съгласно индукционно предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_j^*$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно (П∃).

□

[2] Ясно е, че образуването на A^*, завависи от избора на варианта $\mathbf{D}'$ на $\mathbf{D}$. Нека $\mathbf{A}^{*'}$ е превод на $\mathbf{A}$, който използва варианта $\mathbf{D}''$ на $\mathbf{D}$. Ако $\mathbf{A}$ съдържа $\mathbf{p}$ и $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$ са различни, то $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^{*'}$ са различни формули. От друга страна $\mathbf{A}^{*'}$ може да се получи от $\mathbf{A}^*$ чрез замени на подформули $\mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ с $\mathbf{D}''_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. От теоремата за варианта и правилото за замяната имаме $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \mathbf{D}''_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^* \leftrightarrow \mathbf{A}^{*'}$.

Теорема 2.32. За всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ е в сила

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

В частност $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. Тогава в $\mathcal{F}'$ има доказателство $\mathbf{A}_1,\ldots,\ \mathbf{A}_n \equiv \mathbf{A}$. Оттук и предното твърдение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$.

Нека сега $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^*$. Оттук и $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$ следва $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

□

От доказаното по-горе следва, че обичайните аксиомни схеми, зависещи от формули, остават в сила и за нововъведените предикатни символи. Наистина, всяка аксиомна схема, зависеща от формули, се изразява чрез формула, в която присъстват променливи по формули, като смисълът е, че замествайки тези променливи с истински формули на формалната система, получаваме формула, която е аксиома. Нека една конкретна формула $\mathbf{B}$ от дадена аксиомна схема се получава чрез заместване на променливите по формулите с формулите $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, съдържащи новия предикатен символ. Тогава превода $\mathbf{B}^*$ може да се получи от аксиомната схема, замествайките променливите по формулите с формулите $\mathbf{A}_1^*, \ldots, \mathbf{A}_n^*$ (като за получаването на всички тези преводи е използван един и същи вариант на формулата $\mathbf{D}$). Тогава $\mathbf{B}^*$ е аксиома на $\mathcal{F}$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}^*$. Оттук $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{B}$ и значи $\mathbf{B}$ е в сила за $\mathcal{F}'$.

2.10 Разширения с помощта на функционален символ, дефиниран чрез терм

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред. Нека $\mathbf{b}$ е терм на $\mathcal{F}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Нека $\mathbf{f}$ е нов n-местен функционален символ. Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ чрез дефиниране на функционалния символ $\mathbf{f}$ с помощта на терма $\mathbf{b}$, ако $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки функционалния симол $\mathbf{f}$ и дефиниращата аксиома

$$\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{b}.$$

Аналогично на разширенията посредством дефиниция на предикатен символ ще дефинираме превод $\mathbf{a}^*$ на терм $\mathbf{a}$ на $\mathcal{F}'$ и превод $\mathbf{A}^*$ на формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$, така че

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{a} = \mathbf{a}^*,$$

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$$

и

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

Нека $\mathbf{a}$ е терм на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{a}$ не съдържа $\mathbf{f}$, то $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{a}$. В противен случай $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c}_{\mathbf{x}}[\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$, където $\mathbf{c}$ съдържа (поне) едно срещане на $\mathbf{f}$ по-малко, а $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ не съдържат $\mathbf{f}$. Тогава $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{c}^*_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]]$.[3] Ако $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}'$, то $\mathbf{A}^*$ се получава от $\mathbf{A}$ замествайки всеки терм $\mathbf{a}$, участващ в $\mathbf{A}$

Твърдение 2.33. $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{a} = \mathbf{a}^*$, $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по броя на срещанията на $\mathbf{f}$ в $\mathbf{a}$. Ако $\mathbf{a}$ не съдържа $\mathbf{f}$, то $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{a}$ и тогава $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ е теорема за тъждеството. В противен случай $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c}_{\mathbf{x}}[\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$, $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{c}^*_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]]$, където $\mathbf{c}$ съдържа (поне) едно срещане на $\mathbf{f}$ по-малко, а $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ не съдържат $\mathbf{f}$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{c} = \mathbf{c}^*$. От друга страна от аксиомата $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{b}$ и правилото за замяната $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ съгласно теоремата за равентството.

Твърдението $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$ следва от предното твърдение и теоремата за равенството.

□

[3] Нека в PA въведем нов едноместен функционален символ $\cdot^2$ и дефинираща аксиома $x^2 = x.x$. Нека $\mathbf{a} \equiv (z^2 + y)^2$. Тогава $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c}_{z'}[z^2]$, където $\mathbf{c} \equiv (z' + y)^2$. При това $\mathbf{c} \equiv \mathbf{d}_{z''}[(z' + y)^2]$, където $\mathbf{d} \equiv z''$. Тогава $\mathbf{d}^* \equiv \mathbf{d}$, $\mathbf{c}^* \equiv (z' + y).(z' + y)$ и $\mathbf{a}^* \equiv (z.z + y).(z.z + y)$.

Твърдение 2.34. Нека $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ е доказателство в $\mathcal{F}'$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (където всички преводи са направени с един и същи вариант на $\mathbf{D}$).

Доказателство. Ще извършим доказателството с индукция по i. Нека първо $\mathbf{A}_i$ е логическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е съждителна аксиома, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \neg\mathbf{A}^* \vee \mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е съждителна аксиома на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за субституцията, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{A_x}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}^*[\mathbf{a}^*] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е аксиома за субституцията на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството, некасаеща символа $\mathbf{f}$, то $\mathbf{A}_i$ е формула на $\mathcal{F}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{f}x_1 \ldots x_n = \mathbf{f}y_1 \ldots y_n,$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[y_1 \ldots y_n],$$

което е теорема на $\mathcal{F}$, съгласно теоремата за равентството.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\mathbf{A}_i$ не съдържа символа $\mathbf{f}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{b},$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

което е теорема за тъждеството.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{j_k}$ $(j_1, \ldots, j_k < i)$. Тъй като е в сила $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \equiv \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$ и $(\neg\mathbf{A})^* \equiv \neg\mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}_i^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1}^*, \ldots, \mathbf{A}_{j_k}^*$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{j_s}$ за $1 \leqslant s \leqslant k$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i$.

Накрая нека $\mathbf{A}_i$ се получава от $\mathbf{A}_j$ $(j < i)$ чрез (П∃). Тогава $\mathbf{A}_i \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}_i^* \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Съгласно индукционно предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_j^*$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно (П∃).

□

Теорема 2.35. За всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ е в сила

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

В частност $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. Тогава в $\mathcal{F}'$ има доказателство $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \equiv \mathbf{A}$. Оттук и предното твърдение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$.

Нека сега $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^*$. Оттук и $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$ следва $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

□

Както и в случая на разширения с помощта на дефиниция на предикатен символ, в случай, че (част от) нелогическите аксиоми на $\mathcal{F}$ са аксиомни схеми, тези аксиомни схеми остават в сила и за формули, съдържащи дефинирания символ $\mathbf{f}$.[4]

[4] Нека разширим PA с помощта на дефиниция на функционалени (или предикатен) символ. Нека $\mathbf{A}$ е формула от разширението, която съдържа новия символ. Тогава формулата $\mathbf{A_x}[0] \to \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]) \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ не е аксиома на разширението. От друга страна преводът на тази формула има вида $\mathbf{A}_\mathbf{x}^*[0] \to \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}^* \to \mathbf{A}_\mathbf{x}^*[S\mathbf{x}]) \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}^*$, което е аксиома на PA (тъй като $\mathbf{A}^*$ е формула на PA). Но в разширената формалан система всяка формула е еквивалентна на своя превод и значи формулата $\mathbf{A_x}[0] \to \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]) \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ е теорема на разширението.

По този начин аксиомната схема за индукцията остава в сила и за формули, съдържащи дифинираните символи.