4.6 Втора теорема за непълнота

Да напомним, че една функция наричаме изчислима, ако тя може да се получи от функциия I_k^n, $1 \leqslant k \leqslant n$, $+$, $.$, $K_<$ чрез краен брой суперпозииции и прилагане на μ-оператори. Така

C1. Функциите I_k^n, $1 \leqslant k \leqslant n$, $+$, $.$, $K_<$ са изчислими.

C2. Ако F е k-местна функция изчислима функция, а $G_1, \ldots, G_k$ са изчислими n-местни функции, то функцията $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, действаща по правилото

$$H(\overline{a}) = F(G_1(\overline{a}), \ldots, G_k(\overline{a})).$$

също е изчислима.

C3. Ако G е $n+1$ местна изчислима функция и $\forall \overline{a} \exists x (G(\overline{a}, x) = 1)$, то n-местната функция F, действаща по правилото

$$F(\overline{a}) = \mu x[G(\overline{a}, x) = 1]$$

също е изчислима.

Ще казваме, че предикатът P е изчислим, ако K_P и изчислима функция.

C4. Ако Q е изчислим, k-местен предикат и $F_1, \ldots F_k$ са n-местни изчислими функции, то n местната релация P, дефинирана чрез

$$P(\overline{a}) \iff Q(F_1(\overline{a}), \ldots, F_k(\overline{a}))$$

също е изчислима.

C5. Ако P е $n+1$-местен изчислим предикат, такъв че $\forall \overline{a} \exists x P(\overline{a}, x)$, то n-местната функция F, действаща по правилото

$$F(\overline{a}) = \mu x[P(\overline{a}, x)]$$

също е изчислима.

В общия случай, ако една функция или предикат е дефинирана чрез явна дефиниция, в която участват само променливи, (символи за) изчислими функии и предикати, и μ-оператори (приложени, така че резултатът да бъде тотална функция), то тя е изчислима.

C6. Константните функции са изчислими.

C7. Нека P и Q са изчислими предикати. Тогава $\neg P$, $P \vee Q$, $P \,\&\, Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ са изчислими.

C8. Предикатите $<$, $\leqslant$, $\geqslant$, $>$ и $=$ са изчислими.

C9. Ако P е $n+1$-местен изчислим предикат, то $n+1$-местната функция F, дефинирана чрез

$$F(b, \overline{a}) = \mu x_{x<b} P(\overline{a}, x)$$

е изчислима.

C10. Нека P е $n+1$-местен изчислим предикат. Тогава $n+1$-местните предикати Q и R, дефинирани чрез

$$Q(b, \overline{a}) \iff \exists x_{x<b} P(\overline{a}, x),$$
$$R(b, \overline{a}) \iff \forall x_{x<b} P(\overline{a}, x)$$

са изчислими.

C11. Функцията $\dot{-}$ е изчислима.

C12. Нека $G_1, \ldots, G_k$ са n-местни изчислими функции, $R_1, \ldots, R_k$ са n-местни изчислими предикати, такива че за всяко $\overline{a}$, точно едно от $R_1(\overline{a}), \ldots, R_k(\overline{a})$ е вярно. Тогава n-местната функция F, дефинирана чрез

$$F(\overline{a}) = \begin{cases} G_1(\overline{a}), & R_1(\overline{a}); \\ G_2(\overline{a}), & R_2(\overline{a}); \\ \vdots & \\ G_k(\overline{a}), & R_k(\overline{a}) \end{cases}$$

е изчислима.

C13. Нека $Q_1, \ldots, Q_k$ са n-местни изчислими предикати, а $R_1, \ldots, R_k$ са n-местни изчислими предикати, такива че за всяко $\overline{a}$, точно едно от $R_1(\overline{a}), \ldots, R_k(\overline{a})$ е вярно. Тогава n-местният предикат P, дефиниран чрез

$$P(\overline{a}) \iff \begin{cases} Q_1(\overline{a}), & R_1(\overline{a}); \\ Q_2(\overline{a}), & R_2(\overline{a}); \\ \vdots \\ Q_k(\overline{a}), & R_k(\overline{a}) \end{cases}$$

е изчислим.

$$\begin{aligned} OP(a,b) &= (a+b)(a+b)+a+1, \\ \beta(a,i) &= \mu x_{x<a\dot{-}1}\left[\exists y_{y<a}\exists z_{z<a}(a = OP(y,z) \,\&\, (yOP(x,i)+1) \mid z)\right]. \end{aligned}$$

Теорема 4.16. (i) $\beta(a,i) \leqslant a \dot{-} 1$ за всяко a и i;

(ii) за всяка редица $a_0, a_1, \ldots, a_k$ съществува a, такова че

$$\beta(a,i) = a_i,\ 0 \leqslant i \leqslant k.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(a) &= \beta(a,0), \\ (a)_i &= \beta(a,i+1), \\ \langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle &= \mu x[\mathrm{lh}(x) = n \,\&\, (x)_0 = a_0 \,\&\ldots\&\, (x)_n = a_n], \\ Seq(a) &\iff \forall x_{x<a}(\mathrm{lh}(x) \neq \mathrm{lh}(a) \vee \exists i_{i<\mathrm{lh}(a)}((x)_i \neq (a)_i)), \\ In(a,k) &= \mu x[\mathrm{lh}(x) = k \,\&\, \forall i_{i<k}((x)_i = (a)_i)], \\ a * b &= \mu x[\mathrm{lh}(x) = \mathrm{lh}(a)+\mathrm{lh}(b) \,\&\, \forall i_{i<\mathrm{lh}(a)}((x)_i = (a)_i) \,\&\, \forall i_{i<\mathrm{lh}(b)}((x)_{i+\mathrm{lh}(a)} = (b)_i)], \\ \overline{F}(\overline{a},n) &= \mu x[\mathrm{lh}(x) = n \,\&\, (x)_0 = F(\overline{a},0) \,\&\, \forall i_{i<n}((x)_i = F(\overline{a},i))]. \end{aligned}$$

За всяко *фиксирано* n имаме $\overline{F}(\overline{a},n) = \langle F(\overline{a},0),\ldots,F(\overline{a},n-1)\rangle$. При това $F(\overline{a},n) = (\overline{F}(\overline{a},n+1))_n$.

C14. Ако G е $n+2$-местна изчислима функция и F е $n+1$-местна функция, дефинирана чрез рекурсията

$$F(\overline{a},a) = G(\overline{a},a,\overline{F}(\overline{a},a)),$$

то F е изчислима.

Разглеждаме $\mathcal{L}(PA)$. Нека $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \ldots$ е едно фиксирано изреждане на променливите. Полагаме $SN(\mathbf{z}_i) = 2i$. Полагаме още $SN(=) = 1$, $SN(\neg) = 3$, $SN(\vee) = 5$, $SN(\exists) = 7$, $SN(0) = 9$, $SN(S) = 11$, $SN(+) = 13$, $SN(.) = 15$ и $SN(<) = 17$. Дефинираме код $\ulcorner\mathbf{a}\urcorner$ на терма $\mathbf{a}$ чрез

$$\ulcorner\mathbf{a}\urcorner = \begin{cases} \langle SN(\mathbf{x})\rangle, & \mathbf{a} \equiv \mathbf{x},\ \mathbf{x} \text{ е променлива}; \\ \langle SN(0)\rangle, & \mathbf{a} \equiv 0; \\ \langle SN(S), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv S\mathbf{a}_1; \\ \langle SN(+), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv +\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(.), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv .\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2. \end{cases}$$

Дефинираме код $\ulcorner\mathbf{A}\urcorner$ на формула $\mathbf{A}$ чрез

$$\ulcorner\mathbf{A}\urcorner = \begin{cases} \langle SN(=), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(<), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv < \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(\neg), \ulcorner\mathbf{B}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}; \\ \langle SN(\vee), \ulcorner\mathbf{B}\urcorner, \ulcorner\mathbf{C}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \vee\mathbf{B}\mathbf{C}; \\ \langle SN(\exists), \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, \ulcorner\mathbf{B}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}. \end{cases}$$

Дефинираме следните изчислими функции и предикати, свързани с кодовете на термовете и формулите.

(i) $Vble(a) \iff seq(a) \mathbin{\&} \exists x_{x<a}(a = 2x)$. Тогава

$$Vble(a) \iff a = \ulcorner \mathbf{x} \urcorner \text{ за някоя променлива } \mathbf{x}.$$

(ii) $$Term(a) \iff \begin{cases} 0 = 0, & a = \langle SN(0) \rangle; \\ Term((a)_1), & a = \langle (SN(S), (a)_1 \rangle; \\ Term((a)_1) \mathbin{\&} Term((a)_2), & a = \langle SN(+), (a)_1, (a)_2 \rangle \vee a = \langle SN(.), (a)_1, (a)_2 \rangle \\ Vble(a), & \text{иначе.} \end{cases}$$ Тогава

$$Term(a) \iff a = \ulcorner \mathbf{a} \urcorner \text{ за някой терм } \mathbf{a}.$$

(iii) $AFor(a) \iff a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} ((a)_0 = SN(=) \vee (a)_0 = SN(<)) \mathbin{\&} Term((a)_1) \mathbin{\&} Term((a)_2)$. Тогава

$$AFor(a) \iff a = \ulcorner \mathbf{A} \urcorner \text{ за някоя атомарна формула } \mathbf{A}$$

(iv) $$For(a) \iff \begin{cases} For((a)_1), & a = \langle SN(\neg), (a)_1 \rangle; \\ For((a)_1) \mathbin{\&} For((a)_2), & a = \langle (SN(\neg), (a)_1, (a)_2 \rangle; \\ Vble((a)_1) \mathbin{\&} For((a)_2), & a = \langle (SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle; \\ AFor(a), & \text{иначе.} \end{cases}$$ Тогава

$$For(a) \iff a = \ulcorner \mathbf{A} \urcorner \text{ за някоя формула } \mathbf{A}.$$

(v) $$Sub(a, b, c) = \begin{cases} c, & Vble(a) \mathbin{\&} a = b; \\ \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c) \rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle \\ \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c), Sub((a)_2, b, c) \rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} (a)_0 \neq SN(\exists); \\ \langle (a)_0, (a)_1, Sub((a)_2, b, c) \rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} (a)_0 = SN(\exists) \mathbin{\&} (a)_1 \neq b; \\ a, & \text{иначе.} \end{cases}$$ Тогава

$$\begin{array}{rcl} Sub(\ulcorner \mathbf{a} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner, \ulcorner \mathbf{b} \urcorner) & = & \ulcorner \mathbf{a_x[b]} \urcorner, \text{ за всеки два терма } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ и всяка променлива } \mathbf{x} \\ Sub(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner, \ulcorner \mathbf{a} \urcorner) & = & \ulcorner \mathbf{A_x[a]} \urcorner, \text{ за всяка формула } \mathbf{A}, \text{ всяка променлива } \mathbf{x} \text{ и всеки терм } \mathbf{a}, \text{подходящ за замяна.} \end{array}$$

(vi) $$Fr(a, b) \iff \begin{cases} a = b, & Vble(a); \\ Fr((a)_1, b), & a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle \\ Fr((a)_1, b) \vee Fr((a)_2, b), & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} (a)_0 \neq SN(\exists); \\ Fr((a)_2, b) \mathbin{\&} (a)_1 \neq b, & \text{иначе} \end{cases}$$ Тогава за всеки терм **a** и всяка променлива **x** е в сила

$$Fr(\ulcorner \mathbf{a} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner) \iff \mathbf{x} \text{ е променлива на } \mathbf{a},$$

а за всяка формула **A** и всяка променлива **x** е в сила

$$Fr(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner) \iff \mathbf{x} \text{ участва свободно в } \mathbf{A}.$$

(vii) $$Subtl(a, b, c) \iff \begin{cases} Subtl((a)_1, b, c), & a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle; \\ Subtl((a)_1, b, c) \mathbin{\&} Subtl((a)_2, b, c)), & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} (a)_0 \neq SN(\exists); \\ Subtl((a)_2, b, c) \mathbin{\&} \neg Fr(c, (a)_1)), & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} (a)_0 = SN(\exists) \mathbin{\&} (a)_1 \neq b \\ 0 = 0, \text{иначе} & \end{cases}$$ Тогава за всяка формула **A**, всяка променлива **x** и всеки терм **a** е в сила

$$Subtl(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner, \ulcorner \mathbf{a} \urcorner) \iff \mathbf{a} \text{ е подходящ за замяна на } \mathbf{x} \text{ в } \mathbf{A}.$$

(viii) $PAx(a) \iff a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), (a)_2 \rangle, (a)_2 \rangle \mathbin{\&} For((a)_2)$. Тогава

$$PAx(a) \iff a = \ulcorner \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \urcorner \text{ за някоя формула } \mathbf{A},$$

т.е. a е код на съждителна аксиома.

(ix) $SAx(a) \iff \exists x_{x<a} \exists y_{y<a} \exists z_{z<a}(a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), Sub(x, y, z) \rangle, \langle SN(\exists), y, x \rangle \mathbin{\&} For(x) \mathbin{\&} Vble(y) \mathbin{\&} Term(z) \mathbin{\&} Subtl(x, y, z))$. Тогава

$$SAx(a) \iff a \text{ е код на аксиома за субституцията.}$$

(x) $EAx(a)$, където

$$EAx(a) \iff a \text{ е код на аксиома за равенството.}$$

(xi) $LAx(a) \iff PAx(a) \vee SAx(a) \vee EAx(a)$. Тогава

$$LAx(a) \iff a \text{ е код на логическа аксиома.}$$

Нелогическите аксиоми N1—N9 на PA са конкретни формули, имащи конкретни кодове. Нека тези кодове са $a_1, \dots a_9$.

(xii) $NAx_{PA}(a) \iff \bigvee\limits_{1 \leqslant i \leqslant 9} a = a_i \vee \exists x_{x<a} \exists y_{y<a} (a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), Sub(x, y, \langle SN(0)\rangle\rangle,$ $\langle SN(\vee), \langle SN(\neg), \langle SN(\exists), y, \langle SN(\neg), \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), x\rangle, Sub(x, y, \langle SN(S), y\rangle\rangle\rangle\rangle, x\rangle\rangle \ \& \ For(x) \ \& \ Vble(y))$. Тогава

$$NAx(a) \iff a \text{ е код на нелогическа аксиома на } PA.$$

(xiii) $Ax_{PA}(a) \iff LAx(a) \vee NAx_{PA}(a)$. Тогава

$$Ax_{PA}(a) \iff a \text{ е код на аксиома на } PA.$$

(xiv) $ER(a, b) \iff b = \langle SN(\vee), (b)_1, a\rangle$. Тогава за всеки две формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ е в сила $ER(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{B} \urcorner)$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{B}$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез (ПР).

Дефинираме съответните предикати за (ПСв), (ПА), (ПС) и (П$\exists$)

(xv) $CR(a, b) \iff a = \langle SN(\vee), b, b\rangle$

(xvi) $AR(a, b) \iff (a)_0 = SN(\vee) \ \& \ (a)_{2,0} = SN(\vee) \ \& \ b = \langle SN(\vee), \langle SN(\vee), a_1, a_{2,1}\rangle, a_{2,2}\rangle$

(xvii) $TR(a, b, c) \iff (a)_0 = SN(\vee) \ \& \ (b)_0 = SN(\vee) \ \& \ (b)_1 = \langle SN(\neg), (a_1)\rangle \ \& \ c = \langle (SN(\vee), (a)_2, (b)_2\rangle$.

(xviii) $$\begin{array}{lcl} IR(a, b) & \iff & (a)_0 = SN(\vee) \ \& \ (a)_{1,0} = SN(\neg) \ \& \ \neg Fr((a)_2, (b)_{1,1,1} \ \& \\ & & b = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), \langle SN(\exists), (b)_{1,1,1}, (a)_1\rangle\rangle, (a)_2\rangle \end{array}.$$

Кодът на редицата от изрази $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ е $\langle \ulcorner \mathbf{u}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \mathbf{u}_n \urcorner\rangle$.

(xix) $Prf_{PA}(a) \iff seq(a) \ \& \ \mathrm{lh}(a) \neq 0 \ \& \ \forall i_{i<\mathrm{lh}(a)}(For((a)_i) \ \& \ (Ax_{PA}((a)_i) \vee \exists j_{j<i} \exists k_{k<i}(ER((a)_j, (a)_i) \vee CR((a)_j, (a)_i) \vee$ $AR((a)_j, (a)_i) \vee TR((a)_j, (a)_k, (a)_i) \vee IR((a)_j, (a)_i)))$. Тогава

$$Prf_{PA}(a) \iff a = \langle \ulcorner \mathbf{A}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \mathbf{A}_n \urcorner\rangle \text{ за някое доказателство } \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \text{ в } PA.$$

(xx) $Pr_{PA}(a, b) \iff Prf_PA(b) \ \& \ a = (b)_{\mathrm{lh}(b) \dot{-} 1}$. Тогава

$$Pr_{PA}(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, b) \iff b \text{ е код на доказателство на } \mathbf{A}.$$

Дефинираме още предиката

(xxi) $Thm_{PA}(a) \iff \exists x Pr_{PA}(a, x)$.

Тогава

$$Thm_{PA}(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner) \iff \vdash_{PA} \mathbf{A}.$$

Казваме, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя k-местната функция F, ако за всеки избор на естествени числа $n_1, \dots, n_k$ е в сила

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{F(n_1, \dots, n_k)},$$

Казваме, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ представя k-местния предикат P, ако за всеки избор на естествени числа $n_1, \dots, n_k$ са в сила

$$\begin{array}{rcl} P(a_1, \dots, a_n) & \Longrightarrow & \vdash_{PA^-} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}]; \\ \neg P(a_1, \dots, a_n) & \Longrightarrow & \vdash_{PA^-} \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}]; \end{array}$$

Казваме, че P е представим, ако P може да се представи чрез някоя формула.

Формулите $x = y$, $x < y$ с променливите x, y и формулите $x + y = z$, $x.y = z$ с променливите x, y, z представят съответно предикатите $=, <$ и функциите $+, .$. Нека се обедим за формулата $x + y = z$. Трябва да докажем, че за произволни *естествени* m и n е в сила $\vdash_{PA^-} \overline{m}+\overline{n}=z \leftrightarrow z=\overline{n+m}$. Предвид транзитивността и симетричността на равенството, достатъчно е да докажем, че $\vdash_{PA^-} \overline{m}+\overline{n}=\overline{n+m}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x+0=x}\,(\mathrm{N3})}{\overline{m}+0=\overline{m}}\,(\text{ПЗ}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{x+Sy=S(x+y)}\,(\mathrm{N4})}{\overline{m}+\overline{1}=S(\overline{m}+0)}\,(\text{ПЗ})}{\overline{m}+\overline{1}=\overline{m+1}}\,(\mathrm{T}{=})$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\overline{m}+\overline{n-1}=\overline{m+n-1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x+Sy=S(x+y)}\,(\mathrm{N4})}{\overline{m}+\overline{n}=S(\overline{m}+\overline{n-1})}\,(\text{ПЗ})}{\overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}}\,(\mathrm{T}{=})$$

□

Използвайки, теоремата за равенството и

$$\vdash_{PA^-} x<\overline{n+1} \to (x=\overline{0} \vee x=\overline{1} \vee \cdots \vee x=\overline{n})$$

доказваме, че

1. Ако $\mathbf{B}$ с $\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m,\mathbf{y}$ представя G, а $\mathbf{B}_i$ с $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_i$ представя H_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, то формулата

$$\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_m(\mathbf{B}_1 \ \& \ \dots \ \& \ \mathbf{B}_m \ \& \ \mathbf{B})$$

   с $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{y}$ представя F, дефинирана чрез

$$F(a_1,\dots,a_k)=G(H_1(a_1,\dots,a_k),\dots,H_m(a_1,\dots,a_k)),$$

2. Ако $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{x},\mathbf{y}$ представя G, то формулата

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}_{\mathbf{y}}[\overline{1}] \ \& \ \forall \mathbf{z}(\mathbf{z}<\mathbf{x} \to \neg \mathbf{B}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[\mathbf{z},\overline{1}]).$$

   с $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{y}$ представя F, дефинирана чрез

$$F(a_1,\dots,a_k)=\mu x(G(a_1,\dots,a_k,x)=1)$$

Теорема 4.17. Всяка изчислима функция и предикат е представим.

Лема 4.18 (Пълна индукция)**.** За всяка формула $\mathbf{A}$ на PA и всеки две различни променливи $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, такива че $\mathbf{y}$ не участва в $\mathbf{A}$ е в сила

$$\vdash_{PA} \forall\mathbf{x}(\forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A_x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}) \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}.$$

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ се получава от PA добавяйки нови константи и нелогическа аксиома $\forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}'$, където $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$, замествайки свободните променливи на $\mathbf{A}$, различни от $\mathbf{x}$, с нови константи.

Ще докажем, че $\forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A_x}[\mathbf{y}])$ е теорема на $\mathcal{F}$ с индукция по $\mathbf{x}$. Първо да отбележим, че $\vdash_\mathcal{F} \mathbf{y} \nless 0$, откъдето $\vdash_\mathcal{F} \mathbf{y} < 0 \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$ и следователно

$$\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < 0 \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}])$$

От друга страна

$$\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$$

и

$$\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{y} = \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}].$$

Но $\vdash_\mathcal{F} \mathbf{y} < S\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{y} < \mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{x})$ и значи

$$\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{y} < S\mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}],$$

откъдето

$$\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \to \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < S\mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}]).$$

Следователно $\vdash_\mathcal{F} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A}'_\mathbf{x}[\mathbf{y}])$, откъдето (съгласно теоремата за дедукцията и контстантите)

$$\vdash_{PA} \forall\mathbf{x}(\forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A_x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}) \to \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A_x}[\mathbf{y}]).$$

Оттук, (ТТ) и (ТЗ),

$$\vdash_{PA} \forall\mathbf{x}(\forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \mathbf{A_x}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}.$$

□

От теоремата за пълната индукция и теоремата за тавтологиите получаваме принципа за най-малкия елемент

$$\vdash_{PA} \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{x}(\mathbf{A} \,\&\, \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg\mathbf{A_x}[\mathbf{y}])).$$

В сила е

$$((\mathbf{A} \,\&\, \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg\mathbf{A_x}[\mathbf{y}])) \,\&\, (\mathbf{A_x}[\mathbf{x}'] \,\&\, \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x}' \to \neg\mathbf{A_x}[\mathbf{y}])) \to \mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

Следователно, ако $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}$ от разширение с дефиниции P на PA и

$$\vdash_P \exists\mathbf{x}\mathbf{A},$$

то можем да въведем нов n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ чрез аксиомата

$$\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{A} \,\&\, \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg\mathbf{A_x}[\mathbf{y}])).$$

Ще пишем

$$\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mu\mathbf{x}\mathbf{A}. \tag{1}$$

Под изчислимо разширение на PA ще разбираме разширение с дефиниции, за което дефиниращите аксиоми на предикатните символи са безкванторни, а дефиниращите аксиоми на функционалните символи са от вида (1), където $\mathbf{A}$ е безкванторна. Ясно е, че нововъдените функции и предикати в едно изчислимо разширение на PA са изчислими. Сега ще покажем, че има изчислими разширения със функционални и предикатни символи за всички функции и предикати от раздел 4.2.

Да отбележим, че условието за тоталност на за дефиниция от вида $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mu\mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{a})$, $\mathbf{a}$ е терм, е $\vdash_P \exists\mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{a})$, което е в сила съгласно аксиома за субституцията. При това, тази дефинираща аксиома ни дава $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

Ако сме въвели предикатът R, то можем да въведем K_R, тъй като

$$K_R(a_1, \dots, a_n) = \mu x[(R(a_1, \dots, a_n) \,\&\, x = 1) \vee (\neg R(a_1, \dots, a_n) \,\&\, x = 0)],$$

т.е.

$$\mathbf{K}_R\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mu\mathbf{x}((\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \,\&\, \mathbf{x} = S0) \vee (\neg\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \,\&\, \mathbf{x} = 0))$$

като условието за тоталност

$$\exists \mathbf{x}((\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{x} = S0) \vee (\neg \mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{x} = 0))$$

следва от теоремата за тавтологиите и аксиомата за субституцията. Използвайки дефиниращата аксиома можем да докажем

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n & \rightarrow & \mathbf{K}_R\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = 1 \\ \neg\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n & \rightarrow & \mathbf{K}_R\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = 0 \end{array}$$

Обратно, ако K_R е въведена, то можем да въведем предиката R, чрез

$$R(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow K_R(a_1, \dots, a_n) = 1.$$

Функциите I_i^n можем да въведем чрез

$$I_i^n(a_1, \dots, a_n) = a_i.$$

Функциите $+$, $.$ и предикатът $<$ са първични за PA. В частност можем да въведем $K_<$.

Ако F се дефинира чрез $F(a_1, \dots, a_n) = G(H_1(a_1, \dots, a_n), \dots, H_k(a_1, \dots, a_n))$ и $G, H_1, \dots, H_k$ са въведени то можем да въведем F чрез

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mathbf{G}\mathbf{H}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \dots \mathbf{H}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$$

Ако F се дефинира чрез $F(a_1, \dots, a_n) = \mu x(G(a_1, \dots, a_n, x) = 1)$ и G е вече въведена, то можем да въведем F, стига $\exists \mathbf{x}(\mathbf{G}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\mathbf{x} = S0)$ да е теорема.

Всяка константна функция може да се въведе чрез

$$\mathbf{F}_m\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \overline{m}.$$

Ясно е, че ако R и Q са въведени предикати, то $\neg R$, $R \vee Q$, $R \rightarrow Q$, $R \;\&\; Q$ и $R \leftrightarrow Q$ също могат да бъдат въведени и значи и предикатите $>, \leqslant, \geqslant$.

Ако F се дефинира чрез $F(b, a_1, \dots, a_n) = \mu x_{x<b} R(a_1, \dots, a_n, x)$, където R е въведен предикат, то можем да въведем F чрез

$$\mathbf{F}\mathbf{y}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mu \mathbf{x}(\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\mathbf{x} \vee \mathbf{x} = \mathbf{y}), \tag{2}$$

тъй като условието за тоталност е следствие на аксиомата за тъждеството и аксиомата за субституцията.

Ако предикатът Q се дефинира чрез $Q(b, a_1, \dots, a_n) \iff \exists x_{x<b} R(a_1, \dots, a_n, x)$, където R е въведен предикат, то можем да въведем Q чрез

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{F}\mathbf{y}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n < \mathbf{y},$$

където $\mathbf{F}$ е въведено чрез (2). Тогава $\mathbf{Q}\mathbf{y}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \exists \mathbf{x}(\mathbf{x} < \mathbf{y} \;\&\; \mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\mathbf{x})$ е теорема.

Универсалният ограничен квантор се въвежда на три стъпки възползвайки се от това, че $\forall x_{x<b}$ е еквивалентно на $\neg\exists x_{x<b}\neg$.

Въвеждаме функция $\dot{-}$ чрез

$$\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{y} = \mu \mathbf{z}(\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x} \vee \mathbf{x} < \mathbf{y}),$$

като условието за тоталност $\exists \mathbf{z}(\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x} \vee \mathbf{x} < \mathbf{y})$ се доказва с индукция по $\mathbf{y}$.

Нека F е дефинирана чрез $F(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} G_1(a_1, \dots, a_n), & Q_1(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots & \\ G_k(a_1, \dots, a_n), & Q_k(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$, където $G_1, \dots, G_k, Q_1, \dots, Q_k$ са вече въведени. Нека още $\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \vee \dots \vee \mathbf{Q}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ и $\neg(\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{Q}_j\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ са теореми. Тогава можем да въведем F чрез

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mu \mathbf{x}((\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{x} = \mathbf{G}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \vee \dots \vee (\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{x} = \mathbf{G}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n).$$

Условието за тоталност е следствие на $\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \vee \dots \vee \mathbf{Q}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$, а от $\neg(\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{Q}_j\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ можем да докажем, че $\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{F}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n = \mathbf{G}_i\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$.

Ако R е предикат, дефиниран чрез $R(a_1, \dots, a_n) \iff \begin{cases} R_1(a_1, \dots, a_n), & Q_1(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots & \\ R_k(a_1, \dots, a_n), & Q_k(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$, където $R_1, \dots, R_k, Q_1, \dots, Q_k$ са вече въведени. Нека още $\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \vee \dots \vee \mathbf{Q}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ и $\neg(\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{Q}_j\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ са теореми. Тогава можем да въведем R чрез

$$\mathbf{R}\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \leftrightarrow ((\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{R}_1\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \vee \dots \vee (\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \;\&\; \mathbf{x} = \mathbf{R}_k\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n).$$

Можем да въведем OP, $|$ и β както в раздел 4.1. Основното свойство на β се изразява чрез формулите $\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{z} \to \beta\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{a})$, където $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ са различни и $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ не участват в терма $\mathbf{a}$. Можем да докажем, че тези формули са теореми, повтаряйки доказателството от раздел 4.1, като предварително въведем предикати $Prime$ и $CoPrime$ и докажем техните основни аритметични свойства, които се използват в доказателството. Тези теореми ни дават условията за тоталност, необходими за въвеждането на $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. Можем да въведем $\overline{F}$ и $F(a_1, \ldots, a_n, b) = G(\overline{F}(a_1, \ldots, a_n, b), a_1, \ldots, a_n, b)$.

Следователно можем да въведем последователно $Vble$, $Term$, $AFor$, For, Sub, Fr, $Subtl$, PAx, SAx, EAx,LAx, NAx_{PA}, Ax_{PA}, ER, CR, AR, TR, IR, Prf_{PA} и Pr_{PA}. Тези предикати и функции са изчислими, така че получаваме изчислимо разширение на PA. Накрая въвеждаме предиката Thm_{PA} чрез дефиниращата аксиома

$$Thm_{PA}x \leftrightarrow \exists y Pr_{PA}xy.$$

Ако $\mathbf{A}$ е формула, използваща въведените изчислими предикати и функции, то $\ulcorner\mathbf{A}\urcorner$ е кодът на превода на $\mathbf{A}$ в PA, където за превод на нововъдените предикати и функции се използват съответните представляващи формули от $\mathcal{L}(PA)$. $\ulcorner Thm_{PA}x\urcorner = \langle SN(\exists), SN(y), \ulcorner Pr_{PA}xy\urcorner\rangle$.

1. $\vdash_{PA^+} Sub(\ulcorner\mathbf{A}\urcorner, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}\urcorner) = \ulcorner\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}]\urcorner$.
2. Ако $\vdash_{PA^+} \mathbf{A}$, то $\vdash_{PA} Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner$.
3. $\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner Thm_{PA^+}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner\urcorner$.
4. $\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{A} \to \mathbf{B}\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{B}\urcorner$.

Да разгледаме третото свойство. То е следствие на това, че ако $\mathbf{p}$ е дефиниран изчислим предикат, а $\mathbf{f}$ е дефинирана изчислима функция, то

$$\vdash_{PA^+} \mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \to Thm_{PA}Sb_n(\ulcorner\mathbf{D_p}\urcorner, Num\,\mathbf{x}_1, \ldots, Num\,\mathbf{x}_n), \tag{1}$$
$$\vdash_{PA^+} \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \to Thm_{PA}Sb_{n+1}(\ulcorner\mathbf{D_f}\urcorner, Num\,\mathbf{x}_1, \ldots, Num\,\mathbf{x}_n, Num\,\mathbf{y}), \tag{2}$$

където $\mathbf{D_p}$ чрез $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ представя $\mathbf{p}$, $\mathbf{D_f}$ чрез $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ представя $\mathbf{f}$, а Sb_n се получава чрез n последователни прилагания на Sub. Тогава за дефинирания изчислим предикат $Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner y$ имаме

$$\vdash_{PA^+} Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner y \to Thm_{PA}\ulcorner Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner Num\ y\urcorner$$

От друга страна

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner Num\ y\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner\exists y Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner y\urcorner$$

и следователно

$$\vdash_{PA^+} Pr_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner y \to Thm_{PA}\ulcorner Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{A}\urcorner\urcorner.$$

По същество (1) и (2) представляват формализация в PA на теоремата за представимост на изчислимите предикати и функции, като тяхното доказателство е формализация в PA на доказателството на тази теорема. Ще илюстрираме тази идея за функцията $+$. За нея трябва да докажем частния случай на (2)

$$\vdash_{PA^+} x + y = z \to Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x + y = z\urcorner, Num\,x, Num\,y, Num\,z).$$

Предвид теоремата за равенството достатъчно е да докажем

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x + y = z\urcorner, Num\,x, Num\,y, Num(x + y)) \tag{3}$$

Това е формалният еквивалент, на „$\vdash_{PA^-}$ $\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$ за произволни естествени m и n“, което твърдение доказахме по следния начин:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x+0=x}\,(\mathrm{N3})}{\overline{m}+0=\overline{m}}\,(\Pi 3) \qquad \dfrac{\dfrac{}{x+Sy=S(x+y)}\,(\mathrm{N4})}{\overline{m}+\overline{1}=S(\overline{m}+0)}\,(\Pi 3)}{\overline{m}+\overline{1}=\overline{m+1}}\,(\mathrm{T}{=})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overline{m}+\overline{1}=\overline{m+1}\\ \vdots \\ \overline{m}+\overline{n-1}=\overline{m+n-1}\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x+Sy=S(x+y)}\,(\mathrm{N4})}{\overline{m}+\overline{n}=S(\overline{m}+\overline{n-1})}\,(\Pi 3)}{\overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}}\,(\mathrm{T}{=})$$

Тук се срещаме със следния проблем — за да докажем (3) ни трябва едно доказателство, независещо от y, докато за различни конкретни n горното доказателство е различно. Нека обаче да забележим, че единствената разлика е в дължината на доказатлеството, а то самото е еднотипно, независимо от стойността на n. Нещо повече, бихме могли да съкратим доказателството, използвайки „индукция“ по n, а именно: $\vdash_{PA^-} \overline{m} + \overline{0} = \overline{m+0}$ следва от (N3) и правилото за замяната. Нека сега n е такова, че $\vdash_{PA^-} \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$. От (N4) и правилото за замяната имаме $\vdash_{PA^-} \overline{m} + \overline{n+1} = S(\overline{m} + \overline{n})$, откъдето $\vdash_{PA^-} \overline{m} + \overline{n+1} = \overline{Sm+n}$ съгласно теоремата за равенството.

В тази си форма доказателството може да бъде преобразувано до доказателство чрез индукция по y в PA^+ на

$$Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,y, Num(x+y)).$$

Имаме $\vdash_{PA^+} Pr_{PA}[Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x,\ Num\,0, Num(x+0))], \overline{b}]$, където b е кодът на редицата от кодове на формули, представляваща разписано правило за замяната, чрез което от $\ulcorner x+0=x\urcorner$ получаваме $Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,0, Num\,x)$, което пък е равно на $Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x,\ Num\,0, Num(x+0))$. Следователно

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,0, Num(x+0)).$$

Нека α и β са нови константи и добавим аксиома $Pr_{PA}[Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,\alpha, Num\,y, Num(\alpha+y)), \beta]$. Нека b' е код на редица от кодове на формули, разписавща правилото за замяната и теоремата за равенството, чрез които от $\ulcorner x+Sy = S(x+y)\urcorner$ и новата аксиома получаваме $Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,\alpha, Num(Sy), Num(\alpha+Sy))$. Тогава, използвайки новата аксиома можем да докажем $Pr_{PA}[Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,\alpha, Num\,S(y), Num(\alpha+Sy)), \beta*\overline{b}]$. Оттук и теоремdта за дедукцията и теоремата за константите $\vdash_{PA} Pr_{PA}[Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,y, Num(x+y)), z'] \to Pr_{PA}[Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,S(y), Num(x+Sy)), z' * \overline{b}]$ и следователно

$$\vdash_{PA} Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,y, Num(x+y)) \to Thm_{PA}Sb_3(\ulcorner x+y=z\urcorner, Num\,x, Num\,S(y), Num(x+Sy))$$

□

Теорема 4.19. За всяка формула $\mathbf{A}$ с единствена свободна променлива x съществува затворена формула $\mathbf{A}'$, такава че

$$\vdash_{PA^+} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A}[\ulcorner \mathbf{B} \urcorner].$$

Доказателство. Нека $\mathbf{C}$ е формулата $\mathbf{A}[Sub(x, \ulcorner x\urcorner, Num\,x)]$ и нека $\mathbf{B}$ е формулата $\mathbf{C}[\ulcorner \mathbf{C}\urcorner]$. Имаме

$$\vdash_{PA^+} Sub(\ulcorner \mathbf{C}\urcorner, \ulcorner x\urcorner, Num\ulcorner \mathbf{C}\urcorner) = \ulcorner \mathbf{C}[\ulcorner \mathbf{C}\urcorner]\urcorner, \text{ т.е.}$$

$$\vdash_{PA^+} Sub(\ulcorner \mathbf{C}\urcorner, \ulcorner x\urcorner, Num\ulcorner \mathbf{C}\urcorner) = \ulcorner \mathbf{B}\urcorner.$$

От друга страна

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}[\ulcorner \mathbf{C}\urcorner] \equiv \mathbf{A}[Sub(\ulcorner \mathbf{C}\urcorner, \ulcorner x\urcorner, Num\ulcorner \mathbf{C}\urcorner)],$$

и значи от теоремата за равенството получаваме

$$\vdash_{PA^+} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A}[\ulcorner \mathbf{B}\urcorner].$$

□

Нека Con_{PA} е формулата $\neg Thm_{PA}\ulcorner x \neq x\urcorner$

Теорема 4.20 (Gödel)**.** Ако PA е непротиворечива, то $\nvdash_{PA^+} \mathrm{Con}_{PA}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{B}$ е затворена формула, такава че

$$\vdash_{PA^+} \mathbf{B} \leftrightarrow \neg Thm_{PA}[\ulcorner \mathbf{B}\urcorner].$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned}
&\vdash_{PA^+} \mathbf{B} \to \neg Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner,\\
&\vdash_{PA^+} \mathrm{Thm}_{PA}\ulcorner \mathbf{B} \to \neg Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner\urcorner,\\
&\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner \neg Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner\urcorner.
\end{aligned}$$

От друга страна

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner \to Thm_{PA}\ulcorner Thm_{PA}\ulcorner \mathbf{B}\urcorner\urcorner,$$

така че

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}\ulcorner\mathbf{B}\urcorner \to \neg\mathrm{Con}_{PA},$$

и следователно

$$\vdash_{PA^+} \mathrm{Con}_{PA} \to \mathbf{B}.$$

Да допуснем, че $\vdash_{PA} \mathrm{Con}_{PA}$. Тогава

$$\vdash_{PA^+} \mathbf{B},$$

откъдето

$$\vdash_{PA^+} Thm_{PA}(\ulcorner\mathbf{B}\urcorner),$$

така че

$$\vdash_{PA^+} \neg\mathrm{Con}_{PA}$$

и следователно PA е противоречива.

$\square$