Примерни решения на задачите от изпита по Дискретни Структури,
КН 2 поток, 09 февруари 2024 г.

Задача 1. Нека n и m са цели положителни числа. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^m \right) \binom{n}{k} \right)$$

Решение. Съгласно изучаваното на лекции, лявата страна брои функциите от m-елементен домейн X в n-елементен кодомейн Y.

Дясната страна брои същите функции, но по-подробно. За всяка $f : X \to Y$ дефинираме множеството $f(X)$ така

$$f(X) = \{b \in Y \mid \exists a \in X : f(a) = b\}$$

На прост български, $f(X)$ се състои точно от тези елементи на Y, които се явяват образи по отношение на f. Да дефинираме, че $f(X)$ е *образът на* X *по отношение на* f, или просто *образът на* X, ако f се подразбира.

Множеството от функциите f от X в Y се разбиват по техните образи $f(X)$. Това е очевидно: няма как две различни подмножества на Y да са образи на една и съща от тези функции. Съгласно комбинаторния принцип на разбиването,

$$n^m = \sum_{Z \subseteq Y, Z \neq \emptyset} \left| \{f : X \to Y \mid f(X) = Z\} \right|$$

Сумата е на $2^n - 1$ събираеми.

Ключовото наблюдение е, че всяка функция $f : X \to Y$ задължително е сюрекция от X в $f(X)$. Оттук следва, че за всяка мощност на образ, съответните събираеми са едни и същи. И по-точно, за всяка мощност на образ k, броят на функциите от X в Y, имащи мощност на образа k, е равен на произведението от броя на сюрекциите от m-елементно в k-елементно множество и броя на начините да бъде избран k-елементно подмножество на Y като образ. Съгласно изучаваното на лекции, първият множител е $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^m$, а вторият е $\binom{n}{k}$. Съобразяваме, че $1 \leq |f(X)| \leq n$, като тези граници са точни, така че в крайния отговор се сумира по k от 1 до n. С което обосновахме тъждеството. □

Задача 2. Нека A е крайно непразно множество. Нека $|A| = n$.

2 т. • Колко релации от вида $R \subseteq A \times A \times A$ има?

8 т. • За всяка релация от вида $R \subseteq A \times A \times A$ казваме, че е *интересна*, ако

$$\forall (a, b, c) \in R : a \neq b \neq c \neq a$$

Какъв е броят на интересните релации?

10 т. • За всяка релация от вида $R \subseteq A \times A \times A$ казваме, че е *забележителна*, ако е интересна и освен това е изпълнено следното

$$\forall a, b, c \in A \; \big((a, b, c) \in R \; \rightarrow (b, a, c) \in R \; \wedge \; (a, c, b) \in R \; \wedge \; (b, c, a) \in R \; \wedge$$
$$(c, a, b) \in R \; \wedge \; (c, b, a) \in R \big)$$

Какъв е броят на забележителните релации?

Решение. Отговорът на първото подусловие е 2^{n^3}. Това е директно обобщение на резултата, който изведохме на лекции за броя на бинарните хомогенни релации над n-елементен домейн и който се оказа 2^{n^2}, понеже наредените двойки са n^2 и всяка може да присъства или да не присъства в релацията независимо от другите.

В случая имаме хомогенна тернарна релация над n-елементен домейн. Нейните елементи са наредени тройки. Наредените тройки са n^3 на брой. Това можем да изведем и като мощност на комбинаторни конфигурации с наредба и повторения, с размер 3 над опорно множество с мощност n. Щом наредените тройки са n^3 и всяка може да присъства или да не присъства в релацията независимо от другите, броят на тернарните релации без ограничения е наистина 2^{n^3}.

Във второто подусловие има ограничение върху тернарните релации: трябва да няма повторения на елементи в техните елементи (които са наредени тройки). Нека $\mathcal{A}$ е множеството

$$\mathcal{A} = \{(a, b, c) \in A^3 \,|\, a \neq b \neq c \neq a\}$$

На прост български, това са наредените тройки без повторения.

Твърдим, че $|\mathcal{A}| = n(n-1)(n-2)$. Това можем да изведем като мощност на комбинаторни конфигурации с наредба и без повторения, с размер 3 над опорно множество с мощност n. Щом наредените тройки без повторения са $n(n-1)(n-2)$ и всяка може да присъства или да не присъства в релацията независимо от другите, броят на тернарните релации без ограничения е наистина $2^{n(n-1)(n-2)}$.

Решаваме третото подусловие. Забележителните релации нямат повторения на елементи в тройките си, бивайки интересни релации, но има и допълнително ограничение: ако някоя тройка (без повторение) е елемент на R, то и останалите, пет на брой, тройки със същите елементи са в R.

Накратко, за всеки три на брой, два по два различни елемента, или всички техни пермутации са в R, или нито една тяхна пермутации не е в R. Можем да въведем бинарна хомогенна релация $Q \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ така: $(u, v, w) \, Q \, (x, y, z)$ тстк $\{u, v, w\} = \{x, y, z\}$. Q е рефлексивна, симетрична и транзитивна, поради което е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност е с мощност $3! = 6$, откъдето, по комбинаторния принцип на делението, нейните класове на еквивалентност са $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ на брой. Накратко, те са $\binom{n}{3}$ на брой. Това е точно броят на комбинаторните конфигурации без наредба и без повтаряне, с големина 3 над опорно множество с мощност n. Тоест, това са 3-елементните подмножества на A. Но тогава забележителните тернарни релации са точно толкова, колкото са фамилиите над A, чиито елементи са с мощност 3. Всяка група от шест наредени тройки–пермутации на едни и същи три елемента може да присъства или да не присъства в R, независимо от останалите такива групи, също както всяко 3-елементно подмножество мооже да присъства или да не присъства във фамилия.

Заключаваме, че отговорът е $2^{\binom{n}{3}}$.

Резултатът тук е аналогичен на резултата от лекции, казващ, че симетричните антирефлексивни бинарни релации над n-елементен домейн са $2^{\binom{n}{2}}$, което точно съвпада с броя на обикновените именувани графи на n върха. Това, че в тази задача релацията е тернарна, а не бинарна, се отразява само на долния индекс на биномния коефициент в степенния показател. $\square$

Задача 3. В някакъв град има три училища. Всяко от тях има точно n ученици. Знае се, че всеки ученик от всяко училище се познава с поне $n+1$ ученици от другите две училища. Докажете, че съществуват поне трима ученици, нито двама от които не са от едно и също училище, които се познават взаимно.
В тази задача познанството е симетрична релация.

Решение. Да моделираме задачата с неориентиран граф: учениците са върховете, а познанствата са ребрата. Това, че множеството от общо $3n$ ученици се разбива на три подмножества (трите училища), и познанствата, за които става дума, са само между ученици от различни училища, на езика на графите се превежда така: множеството от върховете V се разбива на V_1, V_2 и V_3 и за всяко ребро (u, v) е вярно, че $u \in V_i$ и $v \in V_j$, за някои $i, j \in \{1, 2, 3\}$, такива че $i \neq j$. Такъв вид граф може да наречем *триделен* заради очевидната аналогия с двуделните графи. От условието става ясно, че $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$.

Забележете, че не се казва, че между учениците от едно и също училище няма познанства, но такива познанства са нерелевантни за тази задача, така че те не задават ребра.

Твърдението, което трябва да се докаже, е, че в конструирания триделен граф има 3-клика. Ако има 3-клика, непременно нейните върхове са по един от всеки дял.

Тъй като дяловете са с мощност n, а всеки връх има поне $n+1$ съседи по условие, всеки връх от V_i има поне един съсед във V_j и поне един съсед във V_k, където i, j, k е пермутация на $\{1, 2, 3\}$. Нека ℓ е минималният брой съседи от един и същи дял на връх в графа. Забележете, че $\ell \geq 1$. Разглеждаме произволен връх u, който има точно ℓ съседи от един и същи дял. БОО, нека $u \in V_1$ и u има точно ℓ съседи от V_2. Тогава u има поне $n + 1 - \ell$ съседи от V_3. Разглеждаме произволен $w \in V_2$, който е съсед на u. Такъв w съществува, понеже, както вече отбелязахме, $\ell \geq 1$.

Ключовото наблюдение е, че w има поне ℓ съседи във V_3, защото ℓ е дефиниран така. Нека множеството от съседите на u във V_3 е U и множеството от съседите на v във V_3 е W. Вече знаем, че $|U| \geq n + 1 - \ell$ и $|W| \geq \ell$. Предвид това, че $U \subseteq V_3$ и $W \subseteq V_3$ и $|V_3| = n$, заключаваме, че $U \cap W \neq \emptyset$. Разглеждаме произволен $v \in U \cap W$ и веднага виждаме, че $\{u, v, w\}$ е 3-клика в графа. $\square$

Задача 4. Нека $G = (V, E)$ е граф с редица от степените $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Припомнете си, че редицата от степените е ненамаляваща, тоест,

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

Докажете, че ако $d_k \geq k$ за всички k, такива че $k \leq n - 1 - d_n$, то G е свързан.

Решение. Да допуснем противното. Тогава G има поне две свързани компоненти.

Да кажем, че $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. БОО, нека $d(v_i) = d_i$, за $i \in \{1, \dots, n\}$. Нека H е свързаната компонента, в която се намира връх v_n. Забелязваме, че $|V(H)| \geq d_n + 1$, понеже v_n има d_n съседи, всеки от които е връх в H. Допускаме, че $d_k \geq k$ за всички k, такива че $k \leq n - 1 - d_n$.

Но по допускане G има поне още една свързана компонента освен H. Да наречем тази друга свързана компонента K. Нека $j = |V(K)|$. Но G има общо n върхове и H има поне $d_n + 1$ върхове. Тогава $j \leq n - (d_n + 1) = n - 1 - d_n$. Но щом $d_k \geq k$ за всички k, такива че $k \leq n - 1 - d_n$, в частност е вярно, че $d_j \geq j$.

Ключовото наблюдение е, че числото d_j е на j-та позиция в редицата от степените, която е ненамаляваща; щом K има j върхове, неизбежно максималната степен на връх в K е поне d_j. Но от това следва веднага, че K има поне $d_j + 1$ върхове. От това и факта, че $d_j \geq j$, следва, че K има повече от j върхове.

От полученото противоречие следва, че допускането, че G не е свързан, е невярно. $\square$

Задача 5. Даден е неориентиран свързан тегловен граф $G = (V, E)$ с тегловна функция $w : E \to \mathbb{R}$. Професор Дълбоков казва, че ако w е инекция, то G има само едно минимално покриващо дърво. Прав ли е професорът? Обосновете прецизно и формално отговорите си.

Решение. Пита се дали е вярно, че ако теглата на ребрата са уникални, то има само едно покриващо дърво. Отговорът е утвърдителен и сега ще го докажем. Интуитивно е ясно, че е така: ако си представим алгоритъма на Крускал върху G, той сортира ребрата по един единствен възможен начин (щом няма повторения на тегла), поради което след това има само една възможна наредба на ребрата, в която той (алгоритъмът на Крускал) да разглежда ребрата, отхвърляйки тези, които образуват цикъл с вече сложени в МПД-то ребра. Но това не е прецизен аргумент, а по-скоро интуитивно съображение.

Ще докажем контрапозитивното твърдение: ако G има повече от едно МПД, то има повторение на тегла. Да допуснем, че G има поне две различни МПД-та $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$. Очевидно $E_1 \neq E_2$, инак това би било едно и също МПД. Знаем, че $|E_1| = |E_2|$. От тези два факта следва, че $E_1 \setminus E_2 \neq \emptyset$ и $E_2 \setminus E_1 \neq \emptyset$. Нека e_1 е ребро с минимално тегло от $E_1 \setminus E_2$ и нека e_2 е ребро с минимално тегло от $E_2 \setminus E_1$. БОО, нека $w(e_1) \leq w(e_2)$.

Добавяме e_1 към T_2, с което получаваме уницикличен граф U. Нека единственият цикъл на U се казва c. Знаем, че e_1 е ребро в c. Нека e' е произволно ребро в c, което не е в E_1. Забележете, че такова ребро задължително съществува, понеже T_1 е дърво; щом е дърво, не е възможно цикълът c да е негов подграф, следователно поне едно ребро от c не е от E_1. Възможно е $e' = e_2$ или $e' \neq e_2$ – това е без значение за доказателството. Съществено е, че $e_2 \in E_2 \setminus E_1$ и $e' \in E_2 \setminus E_1$. Освен това, e_2 е ребро с минимално тегло от $E_2 \setminus E_1$. Следователно,

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq w(e') \tag{1}$$

Разглеждаме $U - e'$. Това е дърво, понеже e' по конструкция е ребро от цикъла на U. Нещо повече: това е покриващо дърво, понеже множеството от върховете му е V. Да кажем, че $U - e'$ се казва T'. Да сравним теглата на T_1 и T'. В сила е

$$w(T') = w(T_1) + w(e_1) - w(e')$$

Но от (1) знаем, че $w(e_1) \leq w(e')$. Заключаваме, че $w(T') \leq w(T_1)$. Но T_1 е МПД. Тогава T' също е МПД и $w(T') = w(T_1)$. За да е вярно това, трябва $w(e_1) = w(e')$.

И така, това, че има две различни МПД-та влече, че има две различни ребра с едно и също тегло. $\square$

Задача 6. Нека A е крайно множество и $|A| = n$. *Инволюция над* A е всяка функцşя $f : A \to A$, такава че $\forall x \in A : f(f(x)) = x$. Нека T_n е броят на инволюциите над A. Докажете, че следното рекурентно уравнение е в сила за T_n:

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}, & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

Упътване: Да кажем, че $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$*. Разгледайте* $f(a_n)$*. Има точно две възможности:* $f(a_n) = a_n$ *и* $f(a_n) \neq a_n$*. Едната от тях съответства на едното събираемо, а другата, на другото събираемо в дясната страна.*

Бонус от 20 точки: *Неподвижна точка*, или още се казва *фиксирана точка*, на пермутация f е такъв елемент x от домейна, че $f(x) = x$. Инволюцията е частен случай на пермутация, така че може да говорим за фиксирани точки на инволюции. Намерете формула без рекурсия за броя на инволюциите над A, които нямат фиксирани точки. Какво число трябва да е n, за да има такива инволюции?

Решение. Нека $n = 0$. Очевидно $T_0 = 1$, защото, ако $A = \emptyset$, има точно една пермутация, а именно празната, за която е вярно, че $\forall x \in A : f(f(x)) = x$.

Нека $n = 1$. Да кажем, че $A = \{a_1\}$. Има точно една пермутация, а именно $f(a_1) = a_1$, за която е вярно, че $\forall x \in A : f(f(x)) = x$. Следователно, $T_1 = 1$.

Нека сега $n \geq 2$. Да кажем, че $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Инволюциите над A се разбиват на тези, които изобразяват a_n в a_n (a_n е фиксирана точка) и тези, които не изобразяват a_n в a_n (a_n не е фиксирана точка).

- Има точно T_{n-1} инволюции, в които a_n е фиксирана точка, защото техният брой е равен на броя на инволюциите над $A \setminus \{a_n\}$.
- Има точно $(n-1)T_{n-2}$ инволюции, в които a_n не е фиксирана точка, защото тогава е вярно, че $f(a_n) = a_k$ за някое $k \neq n$, като също така е вярно, че $f(a_k) = a_n$, за да бъде изпълнено $f(f(a_n)) = a_n$, тоест, f да е инволюция. Очевидно има $n - 1$ възможности за k, и за всяка от тях, броят на инволюциите над A е същият като броят на инволюциите над $A \setminus \{a_n, a_k\}$.

Съгласно комбинаторния принцип на събирането, $T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$ в случая $n \geq 2$.

Дотук решихме задачата. Сега да видим бонуса. Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нека S_n е броят на инволюциите над A без фиксирани точки. Една инволюция $f : A \to A$ да няма фиксирани точки е същото като A да бъде разбито на двуелементни дялове и за всеки дял $\{a_i, a_j\}$ (очевидно $i \neq j$) да е вярно, че $f(a_i) = a_j$ и $f(a_j) = a_i$. S_n е равен на броя на тези разбивания.

Ако n е нечетно, такова разбиване няма, така че $S_n = 0$, ако n е нечетно.

Нека n е четно. $S_0 = 1$, защото за празната пермутация е вярно, че тя няма фиксирани точки. Нека $n \geq 2$. Неформално казано, става дума за броя на начини елементите на A да бъдат групирани по двойки. Фиксираме кой да е елемент, да кажем a_n. Има $n - 1$ възможности за избор на друг елемент a_k, с който a_n да бъде групиран в смисъл, че $f(a_n) = a_k$ и $f(a_k) = a_n$. Тогава броят на инволюциите над A е поризведението на $(n-1)$ и броя на инволюциите над $A \setminus \{a_n, a_k\}$.

Следователно,

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0 \\ 0, & \text{ако } n \text{ е нечетно} \\ (n-1)S_{n-2}, & \text{ако } n \geq 2 \text{ и } n \text{ е четно} \end{cases}$$

Това рекурентно уравнение не може да бъде решено с метода с хороктеристичното уравнение, но можем да го решим с развиване така. Да кажем, че n е четно и е достатъчно голямо.

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)S_{n-2} = \\ &= (n-1)(n-3)S_{n-4} \\ &= (n-1)(n-3)(n-5)S_{n-6} \\ &= \cdots \\ &= (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Това е произведението от нечетните положителни числа, по-малки от n. Ако $n = 2m$, можем да запишем така

$$S_n = \prod_{i=1}^{m} (2i - 1)$$

Може и така

$$\begin{aligned}
S_n &= (2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 = \\
&= \frac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2m\cdot(2m-2)\cdot(2m-4)\cdots 4\cdot 2} = \\
&\frac{(2m)!}{\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{m \text{ множители}}\cdot m!} \\
&\frac{n!}{2^m m!}
\end{aligned}$$

Бонус подзадачата има интерпретация в теорията на графите. *Съчетание в граф* е подмножество от ребра, които две по две нямат общи върхове. *Перфектно съчетание* е съчетание, в което всеки връх е край на някое от неговите ребра. Очевидно броят на перфектните съчетания е нула, ако броят на върховете е нечетен. Броят не перфектните съчетания в пълен именуван граф с четен брой върхове е равен на броя на инволюциите без фиксирани точки над множеството от върховете.