ДАА Семинар 1
Асимптотични нотации

Изчислителни задачи
- имат екземпляри и решения
- чрез тях се описват проблеми
- „declarative knowledge/what is"

Алгоритми
- имат вход и изход
- чрез тях може да генерираме решения на изчислителни задачи
- „imperative knowledge/how to"

// Пример:

1) Изчислителна задача:

Екземпляр: $x \in \mathbb{N}^+$

Решение: $\sqrt{x}$

2) Алгоритъм: Метод на Нютон

↳ ако имаме текущо предположение y за стойността на $\sqrt{x}$, методът дава начин за намиране на по-точно приближение $y' = \frac{1}{2}\left(y + \frac{x}{y}\right)$

// пример: Нека $x=2$. Търсим $\sqrt{2}$

1итер. Предположение: $y=1$ Коеф. $\frac{x}{y} = 2$ Приближение: $\frac{1}{2}(1+2) = 1{,}5$

2итер. Предположение: $y=1{,}5$ Коеф. $\frac{x}{y} = 1{,}3333$ Приближение: $\frac{1}{2}(1{,}5+1{,}3333) = 1{,}41666$

3итер. Предположение: $y=1{,}41666$ Коеф. $\frac{x}{y} = 1{,}4117$ Приближение: $\frac{1}{2}(1{,}41666+1{,}4117) = 1{,}41421568$

4итер. Предположение: $y=1{,}41421568$ Коеф. $\frac{x}{y} = 1{,}41421144$ Приближение: $1{,}41421356$

- Анализ на алгоритъм – доказване на коректност ≡ ефективност + изчисление на количество ресурси по време и памет ≡ ефикасност

- Деф: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицателна, ако

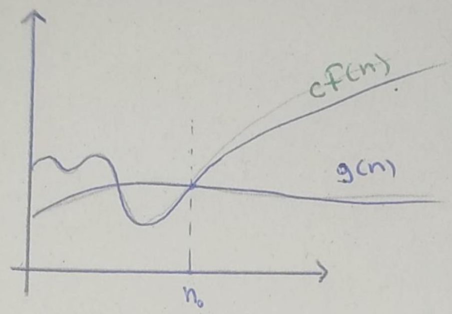
$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : f(n) \geq 0$$

- Деф: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна, ако

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$$

• Деф. $O(f(n)) = \{ g(n) \mid \exists c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c f(n) \}$

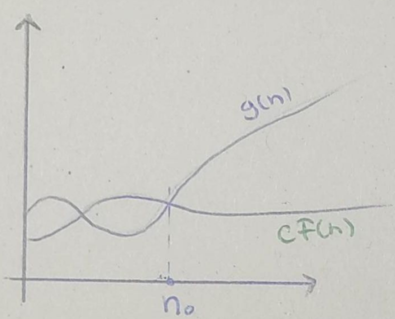
Релация „$\preceq$": $\forall f, g$: $g(n) \preceq f(n)$ тстк $g(n) = O(f(n))$



„g(n) расте асимптотично не по-бързо от f(n)"

• Деф. $\Omega(f(n)) = \{ g(n) \mid \exists c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c f(n) \leq g(n) \}$

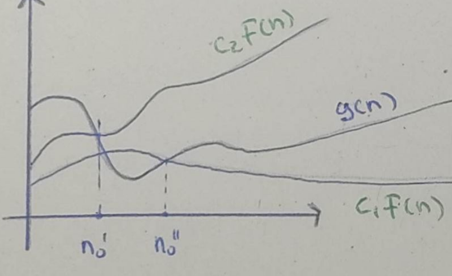
Релацията „$\succeq$": $\forall f, g$: $g(n) \succeq f(n)$ тстк $g(n) = \Omega(f(n))$



„g(n) расте асимптотично не по-бавно от f(n)"

• Деф. $\Theta(f(n)) = \{ g(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n) \}$

Релацията „$\asymp$": $\forall f, g$: $g(n) \asymp f(n)$ тстк $g(n) = \Theta(f(n))$



! $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

от тук идва c_2 ↳ от тук идва c_1

$n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$

• Деф. $o(f(n)) = \{ g(n) \mid \forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) < c f(n) \}$ → може да „заключим" g(n) отгоре на произволно разстояние от един момент (n_0) нататък

„g(n) расте асимптотично по-бавно от f(n)"

• Деф. $\omega(f(n)) = \{ g(n) \mid \forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c f(n) < g(n) \}$

„g(n) расте асимптотично по-бързо от f(n)" ↳ може да „заключим" g(n) отдолу на произволно разстояние от един момент (n_0) нататък.

Релацията „$\prec$": $\forall f, g$: $f \prec g$ тстк $f = o(g)$

Релацията „$\succ$": $\forall f, g$: $f \succ g$ тстк $g = \omega(f)$

// Пример: Нека $g(n) = 3n^2 - 100n + 6$

① Изпълнено ли е: $g(n) = O(n^2)$

Тоест, изпълнено ли е: $\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0: 0\leq 3n^2-100n+6 \leq cn^2$

Да, свидетели за това са, например $c=3$ и $n_0=100$

// Взимаме $n_0=100$, за да е изпълнено $0\leq 3n^2-100n+6$

② Изпълнено ли е: $g(n)=\Omega(n^2)$

Тоест, изпълнено ли е: $\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0: 0\leq cn^2 \leq 3n^2-100n+6$

Да, свидетели за това са например $c=2$ и $n_0=100$

// При $n\geq 100$: $100n\leq n^2 \Rightarrow 3n^2-100n \geq 3n^2-n^2 = 2n^2$

③ Изпълнено ли е: $g(n)=\Theta(n^2)$, тоест вярно ли е: $\exists c_1,c_2>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0$:

Да, свидетели са $c_1=2$, $c_2=3$, $n_0=100$ $\qquad 0\leq c_1n^2\leq 3n^2-100n+6\leq c_2n^2$

④ Изпълнено ли е: $g(n)=\Omega(n^3)$

Тоест, изпълнено ли е: $\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0: 0\leq c.n^3\leq 3n^2-100n+6$

Допускаме, че е изпълнено за някои c и n_0:

$0\leq c.n^3 \leq 3n^2-100n+6$, но $3n^2-100n+6<3n^2$ за $n\geq 1$

$\Rightarrow cn^3\leq 3n^2-100n+6<3n^2$

$\Rightarrow cn^3<3n^2$

1сл) $c\geq 1$. Тогава $cn^3<3n^2$ не е изпълнено $\forall n\geq 3$

2сл) $0<c<1$.

Тогава $\exists a,b>0$ ($\in\mathbb{N}$): $\frac{1}{a}<c<\frac{1}{b}$

$\Rightarrow 0\leq \frac{1}{a}n^3<cn^3<3n^2 \Rightarrow \frac{1}{a}n^3<3n^2$, но това не е изпълнено $\forall n>3.a$

Получихме противоречие с допускането, че съществуват такива c и n_0.

$\Rightarrow g(n)\neq\Omega(n^3)$

За упр. Да се докаже, че $(x+y)^2 = O(x^2+y^2)$ за $x,y\in R$

Зад.① Да се докаже, че $\asymp$ е релация на еквивалентност.

Решение: Разглеждаме само асимптотично неотрицателни функции

Ще докажем, че $\asymp$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна

1) Рефлексивност ($\forall a: aRa$)

В сила е: ~~Ох~~ $\forall f: \exists n_0\ \forall n\geq n_0: 0\leq 1.f(n)\leq f(n)\leq 1.f(n)$, където n_0 е от деф-та за асимпт. неотр.

$\Rightarrow f=\Theta(f) \Rightarrow f\asymp f$

2) Симетричност ($\forall a,b: aRb\rightarrow bRa$)

Нека f,g са такива, че $f\asymp g$. Ще докажем, че $g\asymp f$

От $f \asymp g \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0: 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

Разглеждаме: $0 \le c_1 g(n) \le f(n)\ /\cdot \frac{1}{c_1}$

$\Rightarrow 0 \le g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n)$ 1)

Разглеждаме: $0 \le f(n) \le c_2 g(n)\ /\cdot \frac{1}{c_2}$

$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{c_2} f(n) \le g(n)$ 2)

От 1) и 2) $\Rightarrow 0 \le \frac{1}{c_2} f(n) \le g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow \exists c_1', c_2'\ \exists n_0'\ \forall n \ge n_0': 0 \le \overset{c_1'}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{c_2}}} f(n) \le g(n) \le \overset{c_2'}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{c_1}}} f(n)$

където $c_1' = \frac{1}{c_2}$ и $c_2' = \frac{1}{c_1}$ и $n_0' = n_0$ $\Rightarrow g = \Theta(f) \Rightarrow g \asymp f$

3) Транзитивност ($\forall f,g,h: fRg \wedge gRh \to fRh$)

Нека f, g, h са такива ф-ции, за които е в сила: $f \asymp g$ и $g \asymp h$.

Ще докажем $f \asymp h$.

От $f \asymp g \Rightarrow \exists a_1, a_2 > 0\ \exists n_0'\ \forall n \ge n_0': 0 \le a_1 g(n) \le f(n) \le a_2 g(n)$ 1)

От $g \asymp h \Rightarrow \exists b_1, b_2 > 0\ \exists n_0''\ \forall n \ge n_0'': 0 \le b_1 h(n) \le g(n) \le b_2 h(n)$ 2)

Разглеждаме $g(n) \le b_2 h(n)\ /\cdot a_2$

$\Rightarrow a_2 g(n) \le a_2 b_2 h(n)$, но от 1): $f(n) \le a_2 g(n)$

$\Rightarrow f(n) \le a_2 b_2 h(n)$

Разглеждаме $0 \le b_1 h(n) \le g(n)\ /\cdot a_1$

$\Rightarrow 0 \le a_1 b_1 h(n) \le a_1 g(n)$, но от 1): $a_1 g(n) \le f(n)$

$\Rightarrow a_1 b_1 h(n) \le f(n)$.

$\Rightarrow 0 \le a_1 b_1 h(n) \le f(n) \le a_2 b_2 h(n)$ за $n \ge \max\{n_0', n_0''\}$

$\Rightarrow \exists c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_2 b_2\ \exists n_0 = \max\{n_0', n_0''\}\ \forall n \ge n_0: 0 \le c_1 h(n) \le f(n) \le c_2 h(n)$

$\Rightarrow f = \Theta(h) \Rightarrow f \asymp h$

$\Rightarrow \asymp$ е релация на еквивалентност □

зад. 2 Да се докаже, че релацията $\prec$ е транзитивна

Решение:

Нека f, g, h са такива, че $f \prec g$ и $g \prec h$. Ще докажем, че $f \prec h$

От $f \prec g \wedge g \prec h \Rightarrow [\forall a > 0\ \exists n_0'\ \forall n \ge n_0': 0 \le f(n) < a g(n)] \wedge$

$[\forall b > 0\ \exists n_0''\ \forall n \ge n_0'': 0 \le g(n) < b h(n)]$

$\Rightarrow [\exists n_0'\ \forall n \ge n_0': 0 \le f(n) < 1 g(n)] \wedge [\forall b > 0\ \exists n_0''\ \forall n \ge n_0'': 0 \le g(n) < b h(n)] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall b>0\ \exists n_0 = \max\{n_0', n_0''\}\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) < b \cdot h(n)]$

$\Rightarrow f = o(h) \Rightarrow f \prec h$ ⌐.

• Свойства

1) $f(n) \asymp cf(n),\ \forall c>0$

Доказателство:

Следното $0 \leq a.(cf(n)) \leq f(n) \leq b(cf(n))$ е в сила за $a = \frac{1}{c}, b = \frac{1}{c}$ и n_0 - за което $f(n)$ е асимпт. неотрицателна

$\Rightarrow f(n) = \Theta(cf(n)) \Rightarrow f(n) \asymp cf(n)$

↳ може да игнорираме мултипликативните константи

2) Ако $f(n) \prec g(n)$, то $f(n) + g(n) \asymp g(n)$

Доказателство:

I) От $f(n) \prec g(n) \Rightarrow f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) < c.g(n)$

В частност, последното е в сила и за $c=1$. Нека $c=1$ и n_0 е такова, че

$\forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) < g(n)$

Тогава $\forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) + g(n) < 2g(n)$. Следователно е в сила:

$\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) + g(n) \leq cg(n)$

$\Rightarrow f(n) + g(n) = O(g(n))$ (Δ)

II) Нека $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, където n_0' и n_0'' са от дефинициите за асимпт. неотрицателност на f и g: $\forall n \geq n_0:\ g(n) \geq 0 \wedge f(n) \geq 0$

Тогава $\forall n \geq n_0:\ f(n) + g(n) \geq g(n) \geq 0$

$\Rightarrow \exists c=1\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq g(n) \leq f(n) + g(n)$

$\Rightarrow f(n) + g(n) = \Omega(g(n))$ (□)

От (Δ) и (□) $\Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$

3) $(n+a)^b \asymp n^b,\ \forall b \in \mathbb{R}^+$

Доказателство:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq |a|:\ n+a \leq n+|a| \leq 2n \\ \forall n \geq 2|a|:\ n+\mp|a| \\ \forall n \geq 2|a|:\ n+a \geq n-|a| \geq \frac{1}{2}n \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \geq 2|a|:\ \frac{1}{2}n \leq n+a \leq 2n \quad /^{\wedge b}$$

$\Rightarrow \forall n \geq 2|a|:\ \left(\frac{1}{2}\right)^b n^b \leq (n+a)^b \leq 2^b n^b$

$\Rightarrow (n+a)^b = \Theta(n^b) \Rightarrow (n+a)^b \asymp n^b$

4) $f(n) \asymp g(n) \Leftrightarrow [f(n)]^k \asymp [g(n)]^k,\ \forall k \in \mathbb{R}^+$

Доказателство:

$\Rightarrow$/ Нека $f(n) \asymp g(n) \Rightarrow \exists c_1>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \quad /^{\wedge k}$

$\Rightarrow \exists c_1>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0:\ 0 \leq [f(n)]^k \leq c_1^k [g(n)]^k \Rightarrow f(n)^k = \Theta(g(n)^k) \Rightarrow f(n)^k \asymp g(n)^k$

$\Leftarrow$/ ↳ аналогично на горното