ДАА Семинар 2

Релации $\asymp, \preceq, \succeq, \prec, \succ$

$$f \preceq g \xleftrightarrow{def} f = O(g)$$
$$f \succeq g \xleftrightarrow{def} f = \Omega(g)$$
$$f \prec g \xleftrightarrow{def} f = o(g)$$
$$f \succ g \xleftrightarrow{def} f = \omega(g)$$
$$f \asymp g \xleftrightarrow{def} f = \Theta(g)$$

$$f \prec g \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \succ g \longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \rightarrow f(n) \asymp g(n)$

• Свойства:

1) $f \asymp g \longleftrightarrow f^k \asymp g^k$, $\forall k \in \mathbb{R}^+$

2) $f \prec g \rightarrow a^f \prec a^g$, за f, g - растящи и неогр., $a > 1$ - const

3) $\lg(f) \prec \lg(g) \rightarrow f \prec g$, за f, g „ — "

4) $a^f \asymp a^g \rightarrow f \asymp g$, за f, g „ — ", $a > 1$ - const

$f \asymp g \rightarrow \lg(f) \asymp \lg(g)$

5) $p(n) = a_k n^k + \dots + a_0 \asymp n^k$, за $a_i > 0, \forall i \in \{0, \dots, k\}$

6) $[\log_a n]^k \prec n^\varepsilon$, $\forall a > 1, \varepsilon, k \in \mathbb{R}^+$

зад. 1 Да се докаже свойство 5)

Решение:

Ще използваме: Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$, то $f(n) \asymp g(n)$

$f(n) = n^k$, $g(n) = p(n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a_k n^k + \dots + a_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^k}}{\cancel{n^k}\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k}\right)} = \frac{1}{a_k} > 0 \Rightarrow p(n) \asymp n^k \quad \square$$

зад. 2 Да се докаже свойство 6)

Решение:

Ще използваме $f \prec g \leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Полагаме $b := \frac{\varepsilon}{k}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[\log_a n]^k}{n^\varepsilon} = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\log_a n]^k}{[n^b]^k} \overset{k>0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^b} \overset{ЛП}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_a n)'}{(n^b)'} \overset{(\Delta)}{=}$$

$$// (\log_a n)' = \left(\frac{\ln n}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln n)' \ln a - \ln n (\ln a)'}{(\ln a)^2} = \frac{\frac{1}{n}\ln a - 0}{(\ln a)^2} = \frac{1}{n . \ln a}$$

$$\overset{(\Delta)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b . n^{b-1} . n \ln a} = 0 \Rightarrow f \prec g \,.$$

$$\Rightarrow [\log_a n]^k \prec n^\varepsilon, \quad a > 1, \varepsilon, k \in \mathbb{R}^+$$

• Апроксимация на Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \asymp \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}$$

• Твърдение:

$$\lg n! \asymp n\lg n$$

Доказателство: Използваме свойство 4): Ако $f \asymp g$, то $\log(f) \asymp \log(g)$

$$\lg n! \asymp \lg\left(\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\right) = \lg\sqrt{2\pi n} + \lg n^n + \lg(e^{-n}) = \underbrace{\lg\sqrt{2} + \lg\sqrt{\pi}}_{const} + \lg\sqrt{n} + \lg n^n + \lg e^{-n} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{2}\lg n + n\lg n - n\lg e \asymp n\lg n$$

зад 3 Да се докаже, че $(n+1)^n \asymp n^n$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 0 \quad \Rightarrow (n+1)^n \asymp n^n$$

За упр. Д-се д., че $(n+k)^n \asymp n^n$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$

зад 4 Да се докаже, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$, $\forall \overset{\to\text{константа}}{k} \in \mathbb{N}$

Доказателство:

$$\cdot\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n.(n-1).\ldots.(n-(k+1)).\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1).\ldots.(n-(k+1))}{k!} =$$

$$= \frac{n.\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right].\left[n\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\ldots\left[n\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\right]}{k!} = \frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{k!} \quad (\Delta)$$

Тогава:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \overset{(\Delta)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^k}\overset{\to 0}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\overset{\to 0}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\ldots\overset{\to 0}{\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}}{\cancel{n^k}.k!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} > 0 - const$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} \asymp n^k \quad \square$$

// Дали е изпълнено: $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : a^n \asymp b^n$

Контрапример: $a=9$, $b=4$. Тогава $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n = \infty \Rightarrow 9^n \succ 4^n$

зад 5 Да се докаже, че $g(n) = n$ и $f(n) = \begin{cases} 1, & n\text{-четно} \\ 2^n, & n\text{-нечетно}\end{cases}$ са несравними.

Доказателство:

// Забележка: за да докажем, че $\overset{\text{две ф-ции}}{\vee}$ f и g са несравними е достатъчно да покажем, че следното е в сила: $f \not\preceq g \wedge f \not\succeq g$, тъй като:

1) ако $f \prec g \to f \preceq g$, тоест $f \not\preceq g \to f \not\prec g$
2) ако $f \succ g \to f \succeq g$, тоест $f \not\succeq g \to f \not\succ g$
3) ако $f \asymp g \to f \succeq g \wedge f \preceq g$

Тоест, ако докажем, че е в сила $f \not\preceq g$, ще отречем верността на „$\preceq$", „$\prec$" и „$\asymp$"

Ако докажем, че е в сила $f \not\succeq g$ ще сме доказали и верността на $f \not\succeq g$ (съответно $f \not\succeq g$, $f \not\succ g$)

1) Ще докажем $f(n) \not\preceq g(n)$

Допускаме противното: $\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) \leq c\,g(n)$ е в сила

$\Rightarrow$ за n-нечетно $n \geq n_0$ е в сила: $0 \leq 2^n \leq c.n$.

Но $0 \leq n^2 \leq 2^n$ за $n \geq 5$

$\Rightarrow$

$0 \leq n^2 \leq 2^n \leq c.n$, което не е изпълнено за $n > \max\{c, 5\}$

$\Rightarrow$ допускането води до противоречие $\Rightarrow f(n) \not\preceq g(n) \Rightarrow f(n) \not\asymp g(n) \land f(n) \not\prec g(n)$

① ② ③

2) Ще докажем $f(n) \not\succeq g(n)$

Допускаме противното: $\exists c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c.g(n) \leq f(n)$ е в сила

$\Rightarrow$ за n-четно, $n \geq n_0$ е в сила: ~~$0 \leq 1 \leq c.n$~~ $0 \leq cn \leq 1$, но последното не е изпълнено за $n > \frac{1}{c}$

$\Rightarrow f(n) \not\succeq g(n) \Rightarrow f(n) \not\succ g(n)$

④ ⑤

Доказахме, че f и g са несравними (①, ②, ③, ④, ⑤) □.

Зад. ⑥ Да се подредят по асимптотично нарастване следните 12 функции:

$n^3, n!, n, \lg\lg n, 1, 2^n, n\lg n, \lg n, n^n, n^2, 2n, \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}$

Решение:

//Заб: Нека A е множеството от горните 12 функции. Ще разбием A на класове на еквивалентност спрямо релацията „$\asymp$". Тези класове на еквивалентност ще сравняваме спрямо релацията „$\prec$".

Всеки две от 12-те функции са сравними, ако в строга преднаредба трябва да сравняваме всяка двойка, ще извършим $\binom{12}{2} = 66$ сравнения.

Ще се възползваме от транзитивността на релацията „$\prec$" и от факта, че $\forall f, g, h: f \asymp g \land f \prec h \rightarrow g \prec h$ и ще извършим точно $12-1=11$ сравнения.

Търсим минималния елемент при всяко следващо сравнение:

1) 1 vs $\lg\lg n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg\lg n} = 0 \Rightarrow 1 \prec \lg\lg n$$

2) $\lg\lg n$ vs $\lg n$

Полагаме $m := \lg n$. Когато $n \to \infty$, то $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\lg m}{m} \overset{ЛП}{=} \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\frac{\ln m}{\ln 2}\right)'}{(m)'} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\ln 2 - 0}{(\ln 2)^2 \cdot 1} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m.\ln 2} = 0 \Rightarrow \lg\lg n \prec \lg n$$

3) $\lg n$ vs n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} \overset{2)}{=} 0 \Rightarrow \lg n \prec n$$

4) n vs $2n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} - const > 0 \quad \Rightarrow \quad n \asymp 2n$$

5) $2n$ vs $n\lg n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\lg n} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2n < n\lg n$$

6) $n\lg n$ vs n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\lg n}{n^{\cancel{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} \overset{2)}{=} 0 \Rightarrow \quad n\lg n < n^2$$

7) n^2 vs n^3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 < n^3$$

8) n^3 vs 2^n

Ще използваме твърдението: $\lg(f) < \lg(g) \to f < g$

n^3 vs 2^n / log

$\log(n^3)$ vs $\log(2^n)$ $\equiv$

$3\log(n)$ vs $n\log 2$ $\equiv$

$\log(n)$ vs n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} \overset{2)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \log(n^3) < \log(2^n) \quad \Rightarrow \quad n^3 < 2^n$$

9) 2^n vs $n!$

Отново, използваме същото твърдение.

$\log(2^n)$ vs $\log(n!)$ $\overset{Stirling}{\equiv}$

$n\log 2$ vs $n\log(n)$

n vs $n\log(n)$ –

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 \Rightarrow \log(2^n) < \log(n!) \Rightarrow 2^n < n!$$

10) $n!$ vs $\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}$ $\overset{Stirling}{\equiv}$

$\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}$ vs $\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi \cancel{n}}\,\cancel{n^n}}{e^n} \cdot \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{\sqrt{n}}\,\cancel{n^n}} = \sqrt{2\pi} = cost > 0 \quad \Rightarrow \quad n! \asymp \sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}$$

11) $\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}$ vs n^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n} e^n}{\sqrt{n}\,\cancel{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n}} \overset{\text{Л.П.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^n . 2\sqrt{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n} < n^n$$

Получихме следната наредба:

$$1 \overset{1)}{\prec} \lg\lg n \overset{2)}{\prec} \lg n \overset{3)}{\prec} n \overset{4)}{\asymp} 2n \overset{5)}{\prec} n\lg n \overset{6)}{\prec} n^2 \overset{7)}{\prec} n^3 \overset{8)}{\prec} 2^n \overset{9)}{\prec} n! \overset{10)}{\asymp} \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n} \overset{11)}{\prec} n^n$$

зад. 7 - от изпит 2021г.

Подредете по асимптотично нарастване функциите:

$f_1(n) = n^n$, $f_2(n) = (n+1)^n$, $f_3(n) = e^n . n!$, $f_4(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$, $f_5(n) = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right]^4$,

$f_6(n) = \binom{4n}{2n}$

Решение:

Опростяваме функциите:

$f_2(n) \asymp \underline{n^n}$ - от предна задача

$f_3(n) \asymp e^n . \sqrt{n} . \frac{n^n}{e^n} = \underline{\sqrt{n} . n^n}$ - използвахме следното: $\forall f, g, h: f \asymp g \rightarrow h.f \asymp h.g$ → да се докаже за упражнение

$f_4(n) \asymp \underline{n!}$, тъй като: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n! + (n-1)! + \dots + 1!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\to 0})} = 1 - const > 0$

$f_5(n) \asymp (2^n)^4 = \underline{16^n}$

$f_6(n) \asymp \frac{1}{\sqrt{4n}} . 2^{4n} \asymp \underline{\frac{1}{\sqrt{n}} 16^n}$, тъй като $\binom{n}{\frac{n}{2}} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n$

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} 16^n$ vs 16^n // f_6 vs f_5

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{16^n}}{\sqrt{n} . \cancel{16^n}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} 16^n \prec 16^n$

2) 16^n vs $\sum_{k=1}^{n} k!$ // f_5 vs f_4

16^n vs $n!$ /log

$\log 16^n$ vs $\log n!$

$n \log 16$ vs $n \log n$

n vs $n \log n$ $\Rightarrow n \prec n\log n \Rightarrow 16^n \prec \sum_{k=1}^{n} k! \asymp n!$

3) $\sum_{k=1}^{n} k! \asymp n!$ vs n^n $\overset{\text{stirling}}{=}$ // f_4 vs f_1

$\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}$ vs n^n

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} . \cancel{n^n}}{e^n . \cancel{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{n}}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}\, e^n} = 0 \Rightarrow n! \prec n^n$

4) $n^n \asymp (n+1)^n$ // $f_1 \asymp f_2$

5) n^n vs $\sqrt{n} . n^n$ $\rightarrow n^n \prec \sqrt{n}\, n^n$ // граница // f_1 vs f_3

Получихме:

$f_6(n) \prec f_5(n) \prec f_4(n) \prec f_1(n) \asymp f_2(n) \prec f_3(n)$