ДАА Семинар 6
Рекурентни уравнения

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$; $a \geq 1$, $b > 1$, $f(n)$ - положителна

Рекурентни уравнения от горния вид могат да се решат чрез Мастър теоремата:

Мастър теорема: Нека $k = \log_b a$, $\varepsilon > 0$

1сл) $n^{k-\varepsilon} \succ f(n) \Rightarrow T(n) \asymp n^k$

2сл) $n^k \asymp f(n)$ или разширено $n^k \lg^t(n) \asymp f(n)$, за някое $t \in \mathbb{N}^+$

$\Rightarrow T(n) \asymp n^k \lg^{t+1}(n)$

3сл) $n^{k+\varepsilon} \preceq f(n)$ и $\exists c \in (0,1)$ за $n \uparrow\uparrow$ да е изпълнено, че

$a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$

$\Rightarrow T(n) \asymp f(n)$

зад① Да се намери асимптотиката на следните рекурентни уравнения чрез МТ

а) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

Решение:

$a = 4$

$b = 2$

$\log_b a = \log_2 4 = 2$

$f(n) = n$

Сравняваме $n^{\log_b a - \varepsilon} = n^{2-\varepsilon}$ с $f(n) = n$

$n^{2-\varepsilon} \succ n$ за всяко $\varepsilon \in (0,1)$, следователно сме в първия случай на МТ $\Rightarrow T(n) \asymp n^{\log_b a} = n^2$

б) $T(n) = 4T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^3$

Решение:

$a = 4$

$b = \sqrt{2}$

$\log_b a = \log_{\sqrt{2}} 4 = 2\log_2 4 = 4$

$f(n) = n^3$

Сравняваме $n^{\log_b a - \varepsilon} = n^{4-\varepsilon}$ с $f(n) = n^3$

$n^{4-\varepsilon} \succ n^3$ за всяко $\varepsilon \in (0,1]$, следователно, спрямо 1сл) МТ

$\Rightarrow T(n) \asymp n^4$

в) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

Решение:

$a = 2$

$b = 2$

$\log_b a = \log_2 2 = 1$

$f(n) = n$

Сравняваме $n^{\log_b a} = n^1$ с $f(n) = n$

$n^1 \asymp n$, следователно, спрямо 2сл) МТ

$\Rightarrow T(n) \asymp n\lg n$

г) $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + n$

Решение:

$a = 2$

$b = 8$

$\log_b a = \log_8 2 = k$, където $0 < k < 1$

Сравняваме $n^{\log_b a + \varepsilon} = n^{k+\varepsilon}$ с $f(n) = n$

$n^{k+\varepsilon} \preceq n$ за всяко $\varepsilon \in (0, 1-k]$ // $k + \varepsilon \leq 1 \Leftrightarrow \varepsilon \leq 1 - k$

$1 - k > 0$, тъй като $k < 1$

Следователно сме в 3сл) МТ.

Проверяваме условието за регулярност: търсим $c \in (0,1)$, за $n \uparrow\uparrow$ да е в сила: $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, в нашия случай:

$2 \cdot \frac{n}{8} \leq cn \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq c$ и всяко n

$\overset{3сл)}{\Rightarrow} T(n) \asymp n$

д) $T(n) = 3T(\frac{n}{9}) + n\lg n$

Решение:

$a = 3$

$b = 9$

$\log_b a = \log_9 3 =: k$, където $0 < k < 1$

Сравняваме $n^{\log_9 3 + \varepsilon} = n^{k+\varepsilon}$ с $f(n) = n\lg n$

$n^{k+\varepsilon} \preceq n\lg n$ за всяко $\varepsilon \in (0, 1-k]$

Проверяваме регулярността: търсим $c \in (0,1)$ за $n \uparrow\uparrow$ да е в сила

$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, в нашия случай: $3 \cdot \frac{n}{9} \cdot \lg(\frac{n}{9}) \leq cn\lg n \Leftrightarrow \frac{1}{3}\lg(\frac{n}{9}) \leq c\lg n$

Последното е в сила, например, за $c = \frac{1}{3}$ $\overset{3сл)}{\Rightarrow} T(n) \asymp n\lg n$

зад ② - от семестриално 2023

Да се решат следните рекурентни уравнения:

1) $A(n) = 5A(\frac{n}{7}) + 12n$

2) $B(n) = \sqrt{5}\,B(\frac{n}{\sqrt{7}}) + \sqrt{13n}$

3) $C(n) = 5C(\frac{n}{5}) + n[\lg n]^5$

4) $D(n) = 2D(\frac{n}{2}) + n2^n$

Решение:

1) $A(n)$

$a = 5$

$b = 7$

$\log_b a = \log_7 5 =: k$, където $0<k<1$

$f(n) = 12n \asymp n$

Сравняваме $n^{k+\varepsilon}$ с n: $n^{k+\varepsilon} \preceq n$ за всяко $\varepsilon \in (0, 1-k]$

Проверяваме условието за регулярност: търсим $c \in (0,1)$ за $n\uparrow\uparrow$:

$$af(\tfrac{n}{b}) \leq cf(n) \iff 5.12\tfrac{n}{7} \leq c.12n \iff \tfrac{5}{7} \leq c \quad , \tfrac{5}{7} \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ от 3сл) МТ: $A(n) \asymp n$

2) $B(n)$

$a = \sqrt{5}$

$b = \sqrt{7}$

$\log_b a = \log_{\sqrt{7}}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}} 5 = 2\cdot\frac{1}{2}\log_7 5 = \log_7 5 =: k$

// Тъй като $f(n) \asymp n^{1/2}$ ще намерим приблизителната стойност на k:

От $7>5 \Rightarrow k \in (0,1)$

$\log_7 5 > \frac{1}{2}$, тъй като $7^{1/2} \approx 2,6 < 5$

Сравняваме $n^{k-\varepsilon}$ с $n^{1/2}$: $n^{k-\varepsilon} \succeq n^{1/2}$ за всяко $\varepsilon \in (0, k-\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow$ от 1сл) на МТ, $B(n) \asymp n^{\log_7 5}$

3) $C(n)$

$a = 5$

$b = 5$

$\log_b a = \log_5 5 = 1 =: k$

$f(n) = n[\lg n]^5$

В сила е:

$n^{k+\varepsilon} \not\asymp f(n)$, тъй като $[\log_b n]^p \prec n^1$

$n^{k-\varepsilon} \not\asymp f(n)$

$n^k \not\asymp f(n)$

Ще използваме разширението на 2сл)

③

Сравняваме $n^k \lg^t(n) = n\lg^t(n)$ с $n[\lg n]^5$:

$$n\lg^t(n) \asymp n\lg^5(n) \quad \text{за} \quad t=5$$

$\Rightarrow$ 2ся) МТ: $C(n) \asymp n\lg^6(n)$

4) $D(n) = 2D(\frac{n}{2}) + n2^n$

$a=2$

$b=2$

$\log_b a = 1$

$f(n) = n2^n$

Сравняваме $n^{\log_b a + \varepsilon} = n^{1+\varepsilon}$ с $f(n) = n2^n$:

$$n^{1+\varepsilon} \preceq n2^n \quad \text{, например, за } \varepsilon = 1$$

Проверяваме регулярността:

$$af(\tfrac{n}{b}) \leq cf(n) \iff 2\frac{n}{2}2^{\frac{n}{2}} \leq cn2^n \iff 2^{\frac{n}{2}} \leq c2^n$$, в сила е, например, за $c = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ от 3ся) МТ: $D(n) \asymp n2^n$

- Метод на характеристичното уравнение

Чрез горния метод може да решаваме рекурентни уравнения от следния вид:

$$T(n) = c_1T(n-1) + c_2T(n-2) + \dots + c_kT(n-k) + \alpha_1^n P_1(n) + \alpha_2^n P_2(n) + \dots + \alpha_m^n P_m(n)$$

Нехомогенно линейно рек. уравнение с константни коефициенти и крайна история

Нехомогенната част е сбор на полиноми $P_i(n)$, умножени по експонентата α_i^n

В нашите случаи $T(n)$ ще описват сложност на алгоритми, следователно най-големият по абсолютна стойност корен е положителен

Зад 3 Да се намери асимптотиката на следните рекурентни уравнения:

а) $T(n) = 4T(n-2) + n2^n + 4.3^n$

Решение:

- Хомогенната част:

$T(n) = 4T(n-2)$

Нейното характеристично уравнение:

$x^n = 4x^{n-2} \quad /: x^{n-2}$

$x^2 = 4$ с корени $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Мултимножество от корените $\{-2, 2\}_M$

- Нехомогенната част:

$n2^n + 4.3^n = 2^n.n^1 + 3^n(4n^0)$

Те дава мултимножеството $\{2,2,3\}_M$

Обединяване двете множества: $\{-2,2,2,2,3\}$.

Общото решение има вида: $T(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n + c_4 n^2 2^n + c_5 3^n \asymp 3^n$

б) $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$

Решение:

Характеристично уравнение:

$x^n = 2x^{n-1} - x^{n-2} \; /: x^{n-2}$

$x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$ с корени $x_{1,2} = 1 \Rightarrow \{1,1\}_M$.

Няма нехомогенна част.

Общото решение е от вида: $T(n) = c_1 1^n + c_2 n 1^n \asymp n$

в) $T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2) + 1$

Решение:

- Хомогенна част:

$T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$

Характеристично:

$x^n = 4x^{n-1} - 3x^{n-2} \; /: x^{n-2}$

$x^2 = 4x - 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Търсим корените:

$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3 = x(x-1) - 3(x-1) = (x-3)(x-1) = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 3$

С мултимножество $\{1,3\}_M$

- Нехомогенна част

$1 = n^0 . 1^n$ с мултимножество $\{1\}_M$

- Общото мултимножество: $\{1,1,3\}_M$

Общото решение: $T(n) = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 3^n \asymp 3^n$

г) $T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2) + 1$ – от семестриално 2021г.

Решение:

- Хомогенна част:

$T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2)$

Характеристично

$x^n = 4x^{n-1} + 3x^{n-2} \; /: x^{n-2}$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

Търсим корените: $D = k^2 - ac = 4 + 3 = 7$

$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = 2 \pm \sqrt{7}$

мултимножество: $\{2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}\}_M$.

· Нехомогенна част

$1 = 1^n \cdot n^0$

мултимножество $\{1\}_M$

Общо мултимножество: $\{2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}, 1\}_M$

Общо решение: $T(n) = A(2-\sqrt{7})^n + B(2+\sqrt{7})^n + C1^n \asymp (2+\sqrt{7})^n$

g) $Q(n) = 2Q(\frac{n}{2}) + 8Q(\frac{n}{4}) + n^2$ - от сем. 2021

Полагаме $n := 2^m$. Получаваме ново рекурентно:

$P(2^m) = 2P(2^m/2) + 8P(2^m/4) + [2^m]^2 = 2P(2^{m-1}) + 8P(2^{m-2}) + [2^m]^2 = 2P(2^{m-1}) + 8P(2^{m-2}) + 4^m$

Искаме функцията на намаляване да е изваждане на константа:

Нека $R(m) = P(2^m)$

Тогава:

$R(m) = 2R(m-1) + 8R(m-2) + 4^m$

· Хомогенна част

$R(m) = 2R(m-1) + 8R(m-2)$

характеристично:

$x^m = 2x^{m-1} + 8x^{m-2} / x^{m-2}$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$x(x+2) - 4(x+2) = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

мултимножество: $\{-2, 4\}_M$

· Нехомогенна част

$4^m = 4^m \cdot m^0$

мултимножество: $\{4\}_M$

$\{-2, 4, 4\}_M \Rightarrow R(m) \asymp 4^m m = [2^m]^2 m$

$R(m) \asymp [2^m]^2 m$. Следователно $P(2^m) \asymp [2^m]^2 m$. Връщаме полагането: $n = 2^m$ и $m = \log n$

и получаваме: $Q(n) \asymp [2^{\log n}]^2 \cdot \log n = n^2 \lg n$

e) $S(n) = S(n-1) + 2n^2 + 2^{3n} + n8^{n+2} + S(n-1)$ – от сем. 2023г.

Привеждане в искания вид:

$S(n) = 2S(n-1) + (2n^2)1^n + (1+8^2n)8^n$

· Хомогенно

$S(n) = 2S(n-1)$

Характеристично

$x = 2$

↳ $\{2\}_м$.

· Нехомогенно

$(2n^2)1^n + (1+8^2n)8^n$

↳ $\{1,1,1,8,8\}_м$

· Общо мултимножество: $\{1,1,1,2,8,8\}_м$. $\Rightarrow S(n) \asymp n8^n$

ж) $T(n) = 41T(n-2) + 72T(n-3) - 112T(n-4) + n^6 6^n$

Хомогенна част

$T(n) = 41T(n-2) + 72T(n-3) - 112T(n-4)$

Характеристично

$x^n = 41x^{n-2} + 72x^{n-3} - 112x^{n-4} \quad /: x^{n-4}$

$x^4 = 41x^2 + 72x - 112$

$x^4 - 41x^2 - 72x + 112 = 0$

$x^4 + 0x^3 - 41x^2 - 72x + 112 = 0 \quad (\Delta)$

↳ Търсим корените по метода на Хорнер

	1	0	-41	-72	112
1	1	1	-40	-112	0

→ получихме корен $x_1 = 1$

коефициенти

Изразяваме (Δ): $(x-1)\underbrace{(x^3+x^2-40x-112)}_{(o)} = 0$

Търсим корените на (o):

	1	1	-40	-112	
-1	1	0	-40	$-72 \neq 0$	X
-2	1	-1	-38	$-36 \neq 0$	X
-4	1	-3	-28	0	✓

→ получихме корен $x_2 = -4$

Изразяваме (Δ): $(x-1)(x+4)(x^2-3x-28) = 0$ // $x^2-3x-28 = x^2-7x+4x-7.4 = 0$

$x(x+4) - 7(x+4) = 0$

$(x+4)(x-7) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+4)(x+4)(x-7) = 0$

Мултимножество от корените: $\{-4,-4,1,7\}_м$.

↳ от нехомогенната част: $\{6,6,6,6,6,6,6\}_м$

$\Rightarrow T(n) \asymp 7^n$