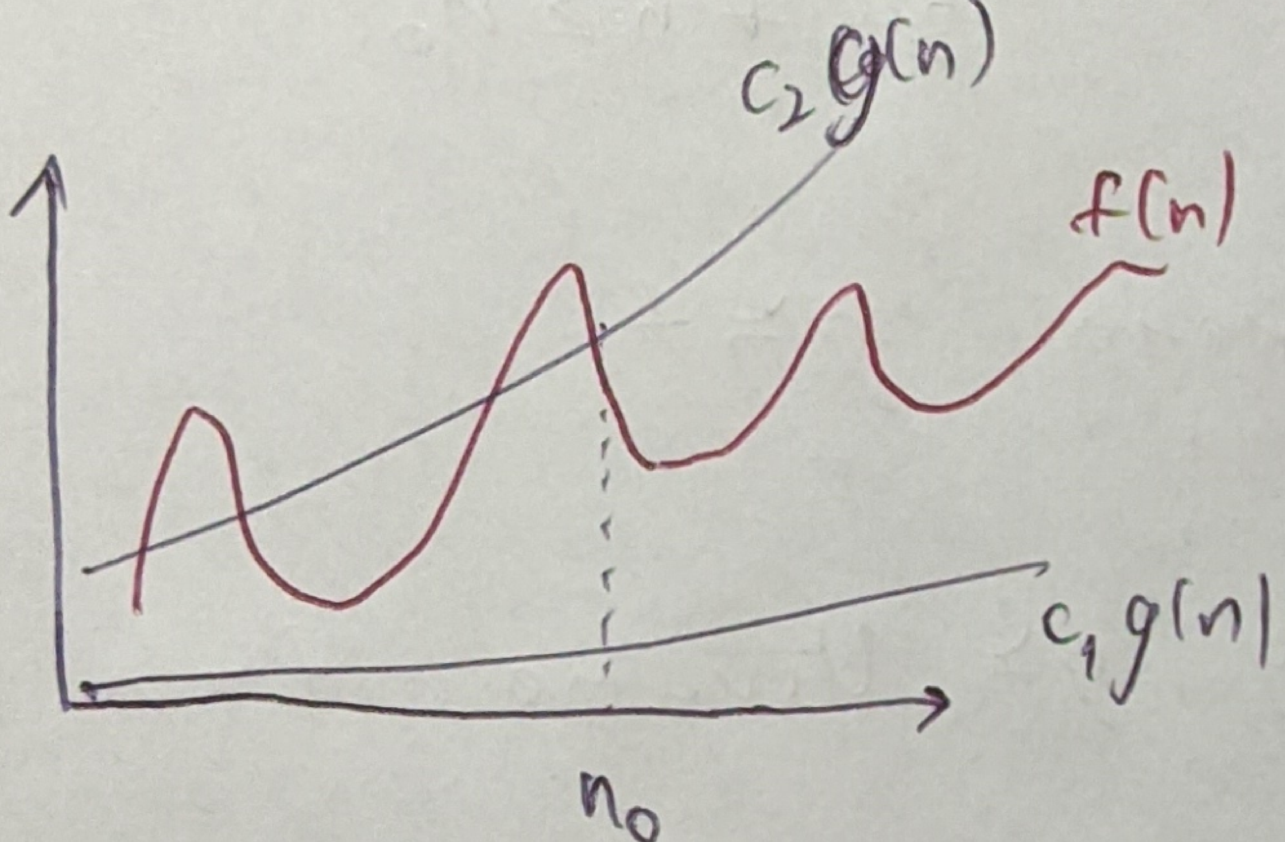
DAA семинар 1

Ще разглеждаме само асимптотично положителни ф-ции.
→ брой стъпки в алгоритъм $\qquad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Деф $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна, ако:
$\exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$ — от някоя стойност нататък функцията е строго положителна

Деф: $\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$



Записваме: $f(n) = \Theta(g(n))$
вместо $f(n) \in \Theta(g(n))$
(може и $f = \Theta(g)$)

За по-кратко ще означаваме: $f \asymp g \iff f = \Theta(g)$
↑асимптотично равенство

Деф 1) $O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c > 0 \ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$
$f \preceq g$

2) $\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c > 0 \ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$
$f \succeq g$

3) $o(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$
$f \prec g$

4) $\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$
$f \succ g$

Св 1) $\asymp$ е релация на еквивалентност

2) $\prec, \preceq, \succeq, \succ$ са транзитивни

3) $f \asymp g \iff f \succeq g$ и $f \preceq g$

Док: 1) Трябва да покажем, че $\asymp$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Първото е очевидно изпълнено.

Симетричност: Дадено $f \asymp g$. Ще покажем $g \asymp f$.

Знаем, че $\exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0\quad 0 \leq c_1 g(n) \overset{(1)}{\leq} f(n) \overset{(2)}{\leq} c_2 g(n)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{От (1)}: \ g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \\ \text{От (2)}: \ \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \iff \\ \iff g(n) \geq \frac{1}{c_2} f(n) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n)$$

за $\forall n \geq n_0$

Тоест за $\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_1}$ и n_0 е изпълнено $g \asymp f$

Транзитивност: Дадено е $f \asymp g$, $g \asymp$. Искаме $f \asymp h$.

$\exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0\quad 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ и

$\exists c_3, c_4 > 0\ \exists n_1 \geq 0 : \forall n \geq n_1\quad 0 \leq c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n)$

Ако разгледаме $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ще са изпълнени горните.

Тогава: $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$

$$c_3 h(n) \leq g(n) \iff c_3 c_1 h(n) \leq c_1 g(n)$$
$$g(n) \leq c_4 h(n) \iff c_2 g(n) \leq c_4 c_2 h(n)$$

$$\iff \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}\quad 0 \leq \underline{c_1 c_3 h(n)} \leq c_1 g(n) \leq \underline{f(n)} \leq c_2 g(n) \leq \underline{c_2 c_4 h(n)}$$

Тоест за $c' = c_1 c_3$, $c'' = c_2 c_4$ и $n' = \max\{n_0, n_1\}$ е вярно $f \asymp h$

$\Rightarrow \asymp$ е РЕ.

2) Ще разгледаме $\prec$ – за останалите е аналогично

Дадено: $f \prec g$, $g \prec h$. Искаме: $f \prec h$.

$\forall c > 0\ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c g(n)$

$\forall c > 0\ \exists n_1 \geq 0 : \forall n \geq n_1 \quad 0 \leq g(n) \leq c h(n)$

Искаме: $\forall c > 0\ \exists n_2 \geq 0 : \forall n \geq n_2 \quad 0 \leq f(n) \leq c h(n)$

Нека $c > 0$ е произволно и n_0, n_1 са съответни за него.
Нека $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Тогава за $\forall n \geq n_2$ е вярно:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f(n) \leq c g(n) \\ 0 \leq g(n) \leq c h(n) \Longleftrightarrow 0 \leq c g(n) \leq c^2 h(n) \end{array}\right\} 0 \leq f(n) \leq c^2 h(n)$$

Нека $c > 0$ е произв. и $c_1 = \sqrt{c} > 0$. Тогава за c_1 получ. аналогично
че $\quad 0 \leq f(n) \leq c_1^2 h(n) = c h(n)$

$\Rightarrow$ за това c и това n_2 е изпълнено $\quad f \prec h$

3) <u>За домашно</u>

<u>6б</u>: 1) $f \succeq g \Longleftrightarrow g \preceq f \quad$ и $f \succ g \Longleftrightarrow g \prec f$

2) $f \prec g \Rightarrow f \not\asymp g,\ f \not\succeq g,\ f \not\succ g$

3) $f \prec g \Rightarrow f \preceq g,\ f \succ g \Rightarrow f \succeq g$

<u>6в</u>: 1) Ако $f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ за k – константа и
$f_1 \succ f_2,\ f_1 \succ f_3 \dots f_1 \succ f_k \Rightarrow f \asymp f_1$

2) Ако $f = f_1 \cdot f_2 \dots f_k$, k – конст и $f_1, \dots, f_m \asymp const$, $m \leq k$
то $f \asymp f_{m+1} \dots f_k$

<u>Зад1</u> Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Тогава $(n+a)^b \asymp n^b$ – да се докаже.

Док: Искаме $c_1, c_2 > 0$: $\quad 0 \leq c_1 n^b \leq (n+a)^b \leq c_2 n^b$.

Разглеждаме $n+a$: $n+a \le n+|a| \le 2n$, ако $n \ge |a|$

$n+a \ge n-|a| \ge \frac{1}{2}n$, ако $n \ge 2|a|$

Тогава за $\forall n \ge 2|a|$: $\frac{1}{2}n \le n+a \le 2n \quad /^b$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b n^b \le (n+a)^b \le 2^b n^b$$

Показахме, че $(n+a)^b \asymp n^b$ за $n_0 = 2|a|$, $c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^b$, $c_2 = 2^b$

Зад 2 Докажете или опровергайте, че $f+g \asymp \max\{f(n); g(n)\}$

Решение: Искаме да намерим n_0, c_1, c_2, т.че:

$$0 \le c_1(f(n)+g(n)) \le \max(f(n), g(n)) \le c_2(f(n)+g(n))$$

Понеже разгл. асимптотично положителни функции,

$\exists n_1 \ge 0 : \forall n \ge n_1 \; f(n) > 0$ и $\exists n_2 \ge 0 : \forall n \ge n_2 \; g(n) > 0$

Тогава за $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ е вярно $f(n) > 0$ и $g(n) > 0$ за $\forall n \ge n_0$.

Оттук, за $\forall n \ge n_0$: $0 \le f(n) + g(n) \quad / \cdot c_1 > 0$

$0 \le c_1(f(n)+g(n)) \quad (1)$

За $\forall n \ge n_0$ е вярно и: $\frac{1}{2}(f(n)+g(n)) \le \max(f(n), g(n)) \quad (2)$

$\max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \quad (3)$

От (1), (2) и (3): $0 \le \underbrace{\frac{1}{2}}_{= c_1}(f(n)+g(n)) \le \max(f(n), g(n)) \le \underbrace{1}_{= c_2} \cdot (f(n)+g(n))$

Зад 3. Вярно ли е, че $1000n^2 \succ \frac{1}{1000}n^3$

Реш: Доп. че е вярно: $\exists c > 0 \; \exists n_0 \ge 0 : \forall n \ge n_0$

$$0 \le c \frac{1}{1000} \cdot n^3 \le 1000 n^2$$

$$\iff n \le \frac{1}{c} \cdot 10^6 \quad \lightning$$

Св. $f \asymp g \Rightarrow f^k \asymp g^k$ за $k > 0$ – константа

Св. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f \prec g$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff f \succ g$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = const \Rightarrow f \asymp g$ Обратното не е вярно!

(Да съществува граница е по-силно от асимптотично равенство)

Втори начин за задача 2:

$$0 \le c_1 \max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \le c_2 \max(f(n), g(n))$$

Аналогично за $n_0 = \max(n_A, n_2)$:

$$0 \le c \max(f(n), g(n)) \quad \text{за } c > 0$$

Преобразуваме (2) от I начин: $f(n) + g(n) \le 2 \max(f(n), g(n))$

Използваме и (3):

$$0 \le \underset{c_1}{\underset{\parallel}{1}} \cdot \max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \le \underset{c_2}{\underset{\parallel}{2}} \cdot \max(f(n), g(n))$$