ДАА Семинар 2

1 зад. Покажете, че $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \asymp n^2$

Решение: Търсим константи c_1, c_2, n_0, т.че за $\forall n \geq n_0$:

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

Понеже разглеждаме функции над $\mathbb{R}^+$, т.е. $n > 0$:

$$0 \leq c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2 \iff \left| \begin{array}{ll} 0 \leq c_1 & (1) \\ c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} & (2) \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2 & (3) \end{array} \right.$$

(1) е изпълнено за кое да е $c_1 > 0$.

За (3) можем да изберем $n_0' = 1$ и $\forall c_2 > 0$ ще е решение.

Искаме дясната част на (2) да е положителна:

$0 < \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \iff 3 < \frac{1}{2} n$ → най-малкото решение е $n_0'' = 7$

$\Rightarrow$ за c_1: $\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7}{14} - \frac{6}{14} = \frac{1}{14}$

Окончателно избираме $c_1 = \frac{1}{14}$ $c_2 = 1$ и $n_0 = \max\{n_0', n_0''\} = 7$

2 зад. Нека $f_1 \asymp g_1$ и $f_2 \asymp g_2$. Докажете/опровергайте:

а) $f_1 \cdot f_2 \asymp g_1 \cdot g_2$

б) $f_1^{f_2} \asymp g_1^{g_2}$

Решение: Дадено ни е, че:

$\exists c_1, c_2 > 0 \; \exists n_1 \geq 0 : \forall n \geq n_1 \quad 0 \leq c_1 g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2 g_1(n) \quad (1)$

$\exists c_3, c_4 > 0 \; \exists n_2 \geq 0 : \forall n \geq n_2 \quad 0 \leq c_3 g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_4 g_2(n) \quad (2)$

За $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ са изп. (1) и (2).

а) Понеже числата в неравенствата са >0, можем да ги умножим:

$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c_1 c_3 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 c_4 g_1(n) g_2(n)$

$\Rightarrow f_1 \cdot f_2 \asymp g_1 \cdot g_2$ за $n_0 = \max(n_1, n_2)$, $c' = c_1 c_3$ и $c'' = c_2 c_4$

// Доказва се, че ако $a, b, c, d > 0$ и $a \leq c, b \leq d$, то $ac \leq bd$

б) Твърдението не е вярно. Контрапример:

Нека $f_1 = g_1 = 2$. Нека $f_2(n) = n$, $g_2(n) = 2n$

Тогава $f_1 \asymp g_1$ и $f_2 \asymp g_2$, но $f_1^{f_2} \not\asymp g_1^{g_2}$, защото

$$2^n < 2^{2n}$$

<u>3 зад</u>. Съществуват ли функции f, g, т.че $f \preceq g$, но нито $f \asymp g$, нито $f \prec g$?

<u>Решение</u>: Трябва да намерим функции f, g, такива, че:

$f \preceq g$ и $f \not\asymp g$ и $f \not\prec g$

Нека $g(n) = n^2$

$$f(n) = \begin{cases} n^2, & n\text{ - четно} \\ n, & n\text{ - нечетно} \end{cases}$$

• Вярно ли е, че $f \preceq g$? Да, защото $\forall n \geq n_0 = 0 \quad 0 \leq f(n) \leq \underset{c_1}{1} \cdot g(n)$

• Вярно ли е $f \asymp g$? От деф. за $f \asymp g$:

$f \not\asymp g \iff \forall c_1, c_2 > 0 \ \forall n_0 > 0 \ \exists n \geq n_0$: $0 > c_1 g(n)$ <u>или</u>
$c_1 g(n) > f(n)$ <u>или</u>
$f(n) > c_2 g(n)$

Не е вярно, че $f \asymp g$, защото за $\forall c > 0$ $\exists n_0 : n_0 < c.n_0^2$

Тоест за $\forall n_0$ имаме достатъчно голямо $n \geq n_0$, което е нечетно, така че $f(n) = n < c.n^2 = c.g(n)$ $\Rightarrow f \not\asymp g$

• Вярно ли е $f \preceq g$? От деф. за $f \preceq g$:

$f \not\preceq g \iff \exists c > 0 \ \forall n_0 \geq 0 \ \exists n \geq n_0 : f(n) < 0$ <u>или</u> $f(n) > c.g(n)$

Нека $c = \frac{1}{2}$, тогава $\forall n_0 \geq 0 \ \exists n \geq n_0$, n-четно:

$$f(n) = n^2 > \frac{1}{2}n^2 = c.g(n) \quad \Rightarrow f \not\preceq g$$

<u>Отговор</u>: Да, такива функции съществуват

<u>Тв</u>. Основата на логаритъма не е съществена за асимптотиката.

<u>Док</u>: Нека $a, b > 0$.

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \underbrace{\frac{1}{\log_b a}}_{\text{константа}} \log_b n \asymp \log_b n$$

Ще приемем, че $\lg n = \log_2 n$

<u>4 зад</u>. (още свойства). Вярно ли е, че: За $a > 0$ е изпълнено:

1) $f \asymp g \Rightarrow a^f \asymp a^g \rightarrow$ Не, например $f = n$, $g = 2n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

2) $f \preceq g \Rightarrow a^f \preceq a^g \rightarrow$ Не, същия пример

3) $f \prec g \Rightarrow a^f \prec a^g \rightarrow$ Да, само ако f и g са растящи и неограничени

Трябва да покажем:

$\forall c > 0\ \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a^{f(n)} \leq c . a^{g(n)}$

Нека $k = \log_a c$ и $c = a^k$ (позволено, защото $c > 0$). Тогава

$\forall k\ \exists n_0 \geq 0\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a^{f(n)} \leq a^k a^{g(n)}$

$\Updownarrow$

$\forall k\ \exists n_0 \geq 0\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq k + g(n) \quad (*)$

От $f \prec g$: $\forall c > 0\ \exists n_1 \geq 0 : \forall n \geq n_1 \quad 0 \leq f(n) \leq c . g(n)$

В частност за $c = \frac{1}{2}$: $\quad 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{2} g(n) \quad (1)$

Но $g(n)$ е растяща и неограничена $\Rightarrow$

$\forall k\ \exists n_2 \geq 0\ \forall n \geq n_2 \quad 0 \leq k + \frac{g(n)}{2}$

$\Updownarrow$

$\frac{g(n)}{2} \leq k + g(n) \quad (2)$

От (1) и (2) за $n_0' = \max(n_1, n_2)$ получаваме

$\forall k\ \exists n_0' : \forall n \geq n_0' : 0 \leq f(n) \leq k + g(n)$ — т.е $(*)$

4) $a^f \asymp a^g \Rightarrow f \asymp g \longrightarrow$ Да, но само ако са неограничени и растящи

5) $a^f \preceq a^g \Rightarrow f \preceq g \longrightarrow$ Да, само за неограничени и растящи

6) $a^f \prec a^g \Rightarrow f \prec g \longrightarrow$ Не, например $2^n \prec 2^{2n}$, но $n \not\prec 2n$

<u>Извод</u>: • Експоненциалната трансформация прави разликите между две функции по-големи

• Логаритмичната трансформация прави разликите по-малки

!<u>Сл.</u> $\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \lg f \prec \lg g \Rightarrow f \prec g \\ 2)\ f \asymp g \Rightarrow \lg f \asymp \lg g \end{array}}$

1) → Обратното не е вярно: $n^2 \succ n$, но $2\lg(n) \not\succ \lg(n)$!

2) → Обратното не е вярно!

Напр. $n^n \succ n!$, но след $\lg$ и двете са $\Theta(n\lg n)$

Ако $\lg$ са $\asymp$, не можем да кажем нищо за началните!

<u>Деф.</u> Апроксимация на Стърлинг: //James Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Big(1 + \underbrace{\frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots}_{\Theta\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)$$

Асимптотична апроксимация на Стърлинг:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

<u>Сл.</u>: $\lg(n!) = \lg(\sqrt{2\pi n}) + \lg(n^n) - \lg(e^n) = \lg\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\lg n +$

$+ n\lg n - n\lg e \asymp n\lg n$

$\Rightarrow \lg n! \asymp n\lg n$

<u>Задача 5</u>: Нека $a > 1$. Докажете, че $\underline{a^n \prec n! \prec n^n}$

<u>Док.</u>: $\lg(a^n) = n\lg a \asymp n$

$\lg(n!) \asymp n\lg n$ и $n \prec n\lg n$ // $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\lg n} = 0$

$\Rightarrow a^n \prec n!$

Разг. $\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}}{n^n} = \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{1}{e^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow n! < n^n$

полилогаритмична

Св. Нека $a>1, k>0, \varepsilon>0$. Тогава $\boxed{(\log_a n)^k < n^\varepsilon}$!

Док: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\log_a n)^k}{n^\varepsilon} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}}\right)^k \underset{\substack{\text{наните} \\ \text{зели} \\ \text{понеже } k>0}}{\overset{\text{за}}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} \overset{\text{Лопитал}}{=}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{\varepsilon}{k}\cdot n^{\left(\frac{\varepsilon}{k}-1\right)}} = \frac{\varepsilon}{\ln a \cdot k}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} = 0 \Leftrightarrow (\log_a n)^k < n^\varepsilon$

Сл. $\forall \varepsilon>0\ \forall a>1$: $\boxed{n^\varepsilon < a^n}$

Обща наредба на функции

$$\boxed{(\log_a n)^k < n^\varepsilon < a^n < n! < n^n}$$

полилогаритмична; полином; експоненциална

3зад. Сравнете функциите

а) $n^{\lg n}$ и $(\lg n)^n$

б) $n^{\lg\lg n}$ и $(\lg n)^{\lg n}$

в) $n^{\lg\lg n}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

г) 2^{n^2+n} и 3^{n^2-n}

д) n^n и $(n+1)^n$

Решение:

а) $n^{\lg n}$ и $(\lg n)^n \xrightarrow{\text{лог.}} \lg n\cdot\lg n$ и $n\lg\lg n$

От общата наредба: $(\lg n)^2 < n$ (1)

$1 < \lg\lg n \; / . n$! Вярно само за нарастваща неограничена функция

$\Rightarrow n < n \lg\lg n$ (2)

(1) и (2) $\Rightarrow \underline{(\lg n)^2} < n < \underline{n \lg\lg n} \Rightarrow n^{\lg n} < (\lg n)^n$

б) $n^{\lg\lg n}$ и $(\lg n)^{\lg n}$

$\downarrow$ логаритмуване

$\lg\lg n . \lg n$ и $\lg\lg n . \lg n$ → равни са → функциите са равни

$\rightarrow n^{\lg\lg n} \asymp (\lg n)^{\lg n}$

в) $n^{\lg\lg n}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^n \longrightarrow \lg\lg n . \lg n$ и $n . \lg\frac{3}{2} \asymp n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n . \lg\lg n}{n} \overset{\text{Лоп}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} . \lg\lg n + \cancel{\lg n} . \frac{1}{\cancel{\lg n}} \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \lg\lg n) \overset{\text{Лоп}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\lg n} . \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \lg n} = 0 \Rightarrow \lg n . \lg\lg n < n \asymp n . \lg\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow n^{\lg\lg n} < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

г) 2^{n^2+n} и 3^{n^2-n}

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2-n}}{2^{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2} . \frac{1}{3^n}}{2^{n^2} . 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}{6^n} = ?$$

Сравняваме $\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}$ и $6^n \xrightarrow{\text{лог.}} n^2 \lg\frac{3}{2} > n \lg 6 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n^2} > 6^n$

$$\Rightarrow \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}{6^n} = +\infty \Rightarrow 2^{n^2+n} < 3^{n^2-n}$$

g) $n^n \sim (n+1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow n^n \asymp (n+1)^n$$