ДАА Семинар 3

От миналия път – обща наредба на функциите:
$\forall a>1 \; \forall k>0 \; \forall \varepsilon>0$

$$(\log_a n)^k \prec n^\varepsilon \prec a^n \prec n! \prec n^n$$

Зад. 1 Да се подредят асимптотично функциите:

$$\overset{1}{(\sqrt{2})^{\lg n}},\ \overset{2}{n^3},\ \overset{3}{n!},\ \overset{4}{(\lg n)!},\ \overset{5}{\lg^2 n},\ \overset{6}{\lg(n!)},\ \overset{7}{2^{2^n}},\ \overset{8}{n^{\frac{1}{\lg n}}},\ \overset{9}{\ln\ln(n)},$$

$$\overset{10}{\left(\tfrac{3}{2}\right)^n},\ \overset{11}{n.2^n},\ \overset{12}{4^{\lg n}},\ \overset{13}{(n+1)!},\ \overset{14}{\sqrt{\lg n}},\ \overset{15}{2^{\sqrt{2\lg n}}},\ \overset{16}{n^{\lg\lg n}},\ \overset{17}{\ln(n)},\ \overset{18}{2^{\lg n}},$$

$$\overset{19}{(\lg n)^{\lg n}},\ \overset{20}{\sin(n!)+2},\ \overset{21}{\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2^k}},\ \overset{22}{\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}},\ \overset{23}{\sqrt[3]{n}.\lg\lg n},\ \overset{24}{\binom{2n}{n}}$$

Решение:

// Искаме да получим линейна наредба между функциите:

$$f_{i_1} \prec f_{i_2} \prec f_{i_3} \asymp f_{i_4} \prec \ldots$$

Нужни са ни поне $n-1$ сравнения за n функции.
В случая – 23, понеже $n=24$.

$$f_1 = (\sqrt{2})^{\lg n} = (2^{\lg n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

$$f_6 = \lg(n!) \asymp n\lg n$$

$$f_8 = n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\frac{\log_2 2}{\log_2 n}} = n^{\log_n 2} = 2$$

$$f_9 = \ln\ln(n) \asymp \lg\lg n$$

$$f_{12} = 4^{\lg n} = (2^{\lg n})^2 = n^2$$

$$f_{18} = 2^{\lg n} = n$$

$f_{19} = (\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$ – от предния час

• Знаем, че $\forall n \geq 0 \quad -1 \leq \sin(n) \leq 1 \iff 1 \leq \sin(n!) + 2 \leq 3$

$\Rightarrow f_{20} = \sin(n!) + 2 \asymp 1$

$f_{21} = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k} \asymp 1$, защото

Кр. на д'Аламбер

1) редът $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ е сходящ $\Rightarrow \exists c > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq c$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq c$

2) $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k} \leq c \cdot 1$

Дотук: $f_8 \asymp f_{20} \asymp f_{21} \asymp 1$

и $f_{19} \asymp f_{16}$

• Сравняваме $f_9 \asymp \lg \lg n$ и $f_{14} = \sqrt{\lg n}$

$\lg \lg n \prec \sqrt{\lg n}$ // $\lg n \prec n^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f_9 \prec f_{14}$

• Сравняваме $f_{14} = \sqrt{\lg n}$ с $f_{17} \asymp \lg n$

Очевидно $f_{14} \prec f_{17}$

• $f_{17} \asymp \lg n$ с $f_5 = \lg^2 n \rightarrow$ Очевидно $f_{17} \prec f_5$

• $f_5 = \lg^2 n$ с $f_{15} = 2^{\sqrt{2 \lg n}}$! И двете са растящи и неограничени

$\lg(\lg^2 n) = 2 \lg \lg n \asymp \lg \lg n$

$\lg(2^{\sqrt{2 \lg n}}) = \sqrt{2 \lg n} \lg 2 \asymp \sqrt{\lg n}$

Знаем, че $\lg\lg n \prec \sqrt{\lg n} \Rightarrow \lg(\lg^2 n) \prec \lg(2^{\sqrt{2\lg n}})$

$\Rightarrow \lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2\lg n}}$, т.е $f_6 \prec f_{15}$

- $f_{15} = 2^{\sqrt{2\lg n}}$ с $f_{23} = \sqrt[3]{n}\,\lg\lg n$

$\lg(2^{\sqrt{2\lg n}}) \asymp \sqrt{\lg n}$

$\lg(\sqrt[3]{n}\,\lg\lg n) = \frac{1}{3}\lg n + \lg\lg\lg n \asymp \lg n$

$\sqrt{\lg n} \prec \lg n \Rightarrow f_{15} \prec f_{23}$

- $f_{23} = \sqrt[3]{n}\,\lg\lg n$ с $f_{22} = \dfrac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\lg\lg n}{\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\lg\lg n \cdot \frac{\lg\lg n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\lg\lg n)^2}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = 0$$

// Пол. $m = \lg n$ $(\lg m)^2 \prec (2^m)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$
$n = 2^m$

$\Rightarrow f_{23} \prec f_{22}$

- $f_{22} = \dfrac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}$ с $f_1 = \sqrt{n} \Rightarrow f_1 \succ f_{22}$

- $f_1 = \sqrt{n}$ с $f_{18} = n \Rightarrow f_1 \prec f_{18}$

- $f_{18} = n$ с $f_6 \asymp n\lg n \Rightarrow f_{18} \prec f_6$

- $f_6 \asymp n\lg n$ с $f_{12} = n^2 \Rightarrow f_6 \prec f_{12}$

- $f_{12} = n^2$ с $f_2 = n^3 \Rightarrow f_{12} \prec f_2$

- $f_2 = n^3$ с $f_4 = (\lg n)!$

$\lg(n^3) = 3\lg n$

$\lg((\lg n)!) \asymp \lg n \cdot \lg(\lg n)$ // $\lg(n!) \asymp n\lg n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{\lg n}}{\cancel{\lg n}\cdot\lg\lg n} = 0 \Rightarrow \lg(n^3) \prec \lg((\lg n)!) \Rightarrow f_2 \prec f_4$$

- $f_4 = (\lg n)!$ с $f_{19} = (\lg n)^{\lg n}$

  пол. $m = \lg n \rightarrow m!$ с $m^m \rightarrow m! \prec m^m$ – от дадата нер.

  $\Rightarrow f_4 \prec f_{19}$

- $f_{19} = (\lg n)^{\lg n}$ с $f_{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

  $\lg((\lg n)^{\lg n}) = \lg n . \lg\lg n$ $\qquad n \succ \lg n . \lg\lg n$

  $\lg\left(\frac{3}{2}\right)^n = n \lg \frac{3}{2} \asymp n$ $\qquad \Rightarrow f_{19} \prec f_{10}$

- $f_{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ с $f_{11} = n 2^n$

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow f_{10} \prec f_{11}$$

- $f_{11} = n.2^n$ с $f_{24} = \binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$ // Док. чрез апр. Стърлинг → за вкъщи

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n.2^n}{\frac{4^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2^n} = 0 \Rightarrow f_{11} \prec f_{24}$$

- $f_{24} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$ с $f_3 = n!$

  $\frac{4^n}{\sqrt{n}} \prec 4^n \prec n! \Rightarrow f_{24} \prec f_3$

- $f_3 = n!$ с $f_{13} = (n+1)!$

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \rightarrow f_3 \prec f_{13}$$

- $f_{13} = (n+1)!$ с $f_7 = 2^{2^n}$

  $\lg((n+1)!) \asymp (n+1)\lg(n+1)$ $\qquad \lg(2^{2^n}) = 2^n \lg 2 \asymp 2^n$

  $\Rightarrow f_{13} \prec f_7$

- $1 \prec \lg\lg n \asymp f_9$

$\Rightarrow$ Окончателно: $f_8 \asymp f_{20} \asymp f_{21} \prec f_9 \prec f_{14} \prec f_{17} \prec f_5 \prec$
$\prec f_{15} \prec f_{23} \prec f_{22} \prec f_1 \prec f_{18} \prec f_6 \prec f_{12} \prec f_2 \prec f_4 \prec f_{19} \asymp f_{16} \prec$
$\prec f_{10} \prec f_{11} \prec f_{24} \prec f_3 \prec f_{13} \prec f_7$

ДР Сравнете: $f_1 = n^2$ $\quad f_2 = n! + n^3\sqrt{n}$ $\quad f_3 = \lg^2 n$

$f_4 = \sum_{i=0}^{n}(n-i)$ $\quad f_5 = 2^n$ $\quad f_6 = \binom{n}{3}$ $\quad f_7 = \lg\lg n$ $\quad f_8 = n^{\lg\lg n}$

$f_9 = \sqrt{\lg n}$ $\quad f_{10} = n! \cdot 2^n$

Докажете, че: 1) За $k \in \mathbb{N}$ - фикс. $\quad \binom{n}{k} \asymp n^k$

2) $\binom{n}{\frac{n}{2}} \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ и $\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$

3) $\sqrt[n]{n} \asymp 1$

Анализ на коректността на итеративни алгоритми

- Инвариант
- База, поддръжка, терминация
- Док. за коректност $\neq$ Док. на инвариант

Зад) Какво прави дадения алгоритъм? Докажете формално.

```
1. Alg1(n - ест. число):
2.     s <- 1
3.     for i <- 1 to n
4.         s <- s * 2
5.     return s
```

Решение: Ще докажем, че $Alg1(n) = 2^n$

Инвариант: При всяко достигане на ред 3 е изпълнено
$$s = 2^{i-1}$$

- База: При $k=1$ (първото) достигане на ред 3
  $s = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ - да, от ред 2.

- Поддръжка: Нека инвариантът е изпълнен за някое достигане на ред 3, което не е последно. (т.е. $s = 2^{i-1}$)

  След изпълнение на ред 4 новата стойност
  $$s' = s \cdot 2 \overset{ИП}{=} 2^{i-1} \cdot 2 = 2^{i-1+1} = 2^i$$

  При следващото достигане на ред 3, т.е. $i+1$-вото:
  $$s = 2^i = 2^{(i+1)-1} \Rightarrow \text{инвариантът е верен.}$$

- Терминация: Нека инв. е изпълнен за последното достигане на ред 3. Последно има, защото i се увеличава вс. път.

  Тогава $i = n+1$. От инв. имаме, че $s = 2^{i-1} = 2^{n+1-1} = 2^n$ което връщаме на ред 5.

Зад 2 Даден е следният алгоритъм:

```
1. Alg2(A[1..n])    n≥1
2.     s ← 0
3.     for i ← 1 to n
4.         s ← s + A[i]
5.     return s
```

Какво връща той? Докажете формално.

Решение: Ще докажем, че $Alg2(A[1..n]) = \sum_{i=1}^{n} A[i]$

- Инв: При всяко достигане на ред 3 е изпълнено, че:

$$s=\sum_{j=1}^{i-1} A[j]$$

• База: При първото достигане на ред 3:

$$s=0=\sum_{j=1}^{0}A[j]=\sum_{j=1}^{1-1}A[j]=\sum_{j=1}^{i-1}A[j]$$

• Поддръжка: Нека инв. е изпълнен за някое достигане на ред 3, което не е последно.

След изпълнение на ред 4 новата стойност на s:

$$s_{next}=s+A[i]\overset{ИП}{=}\sum_{j=1}^{i-1}A[j]+A[i]=\sum_{j=1}^{i}A[j]$$

При следващото достигане на ред 3: $i_{next}=i+1$

$$s_{next}=\sum_{j=1}^{i+1-1}A[j]=\sum_{j=1}^{i_{next}-1}A[j]$$

$\Rightarrow$ Инвариантът е в сила.

• Терминация: При последното достигане на ред 3 $i=n+1$

От инв. имаме, че: $s=\sum_{j=1}^{n+1-1}A[j]=\sum_{j=1}^{n}A[j]$, което връщаме на ред 5.

Последно достигане има, защото i нараства с 1 на всяка стъпка и ще достигне горната граница.

<u>Зад 3</u> Докажете, че следният алгоритъм връща индекс на максимален елемент в масива $A[1..n]$, $n\geq 1$.

FindMaxIndex($A[1..n]$) $n\geq 1$, $A[i]\in\mathbb{Z}$ за $i=1..n$

```
1.   mi ← 1
2.   for i ← 2 to n
3.       if A[i] > A[mi]
4.           mi ← i
5.   return mi
```

Решение:

Инв: За всяко достигане на ред 2 е вярно, че:
mi съдържа индекс на максимален елемент за $A[1..i-1]$

! Казваме максимален (неиленуван), защото в случая може да не е единствен.

- База: При първото достигане на ред 2: $i=2$
  Масивът $A[1..i-1] = A[1..1] = A[1]$ има точно един елемент, който е максимален.
  Но $mi=1 \Rightarrow$ инв. е изпълнен

- Поддръжка: Нека инв. е верен за някое достигане на ред 2, което не е последно.
  В тялото на цикъла са възможни 2 случая:

  1сл $A[i] > A[mi]$. От ИП имаме, че mi съдържа индекс на макс. ел. за $A[1..i-1]$. Тогава $A[i]$ е макс елемент за $A[1..i]$.
  Но от ред 4 имаме, че $mi_{next} = i$, т.е mi_{next} съдържа индекс на макс елемент за $A[1..i]$

  2сл $A[i] \leq A[mi]$. От ИП имаме, че mi съдържа индекс на макс. ел. за $A[1..i-1]$. Но $A[mi]$ е макс. елемент за $A[1..i]$ и $mi_{next} = mi$

  При следващо достигане на ред 2 $i_{next} = i+1$ и mi_{next} съдържа индекс на макс. ел. в $A[1..i_{next}-1]$

- Терминация: При последното достигане на ред 2 $i = n+1$, т.е. от инв. имаме, че mi съдържа индекс на максимален ел-т за $A[1...i-1] = A[1..n]$, което връщаме на ред 5.