ДАА Семинар 6

Интегрален критерий

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) \asymp \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$$, но само за определен вид функции:

$\exists m, M > 0 : \forall n \geq n_0 \quad m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n)$

Ако $f(n)$ е нарастваща и $f(n+1) \asymp f(n)$ – може да се приложи

Пр Може за: – полиноми $f(x) = x^a$
– за $f(n) = a^n$

НЕ може: – за $f(n) = n^n$

Чрез него се доказва: $\sum_{i=1}^{n} i^k = \begin{cases} \Theta(n^{k+1}) & , k > -1 \\ \Theta(\lg(n)) & , k = -1 \\ \Theta(1) & , k < -1 \end{cases}$

Зад1 $T(n) = 2T(n-1) + n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + n = 2(2T(n-2) + n-1) + n = \\ &= 4T(n-2) + 2(n-1) + n = \\ &= 8T(n-3) + 4(n-2) + 2(n-1) + n = \\ &= 2^{n-1}\Theta(1) + 2^{n-2}.2 + 2^{n-3}.3 + \ldots + 2^1.(n-1) + 2^0(n-0) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) \asymp \int_0^{n-1} 2^x(n-x)\,dx = \Theta(2^n) \end{aligned}$$

Ще докажем, че $T(n) = \Theta(2^n)$

1) $T(n) = O(2^n)$.

Търсим $c > 0$, т.че за дост. големи n $T(n) \leq c.2^n$

ИП: $T(n-1) \leq c.2^{n-1}$

$T(n) = 2T(n-1) + n \overset{ИП}{\leq} 2c.2^{n-1} + n = c.2^n + n \overset{?}{\leq} c.2^n$

Очевидно не: $n > 0$

Засилване: Търсим $c > 0$, $b > 0$: $T(n) \leq c.2^n - b$

$T(n) = 2T(n-1) + n \overset{ИП}{\leq} 2c.2^{n-1} - 2b + n \overset{?}{\leq} c.2^n - b$

$n \leq b$ - не

Засилваме: $? b > 0, c > 0 : T(n) \leq c.2^n - bn$ //Ако не стане $\to n^2$ и т.н.

$T(n) = 2T(n-1) + n \overset{ИП}{\leq} 2(c.2^{n-1} - b(n-1)) + n =$
$= 2c.2^{n-1} - 2bn + 2b + n = c.2^n - 2bn + 2b + n$

$c.2^n - 2bn + 2b + n \leq c.2^n - bn$

$-bn + 2b + n \leq 0$

$n(1-b) + 2b \leq 0$

$n(1-b) \leq -2b$

$n \geq \frac{2b}{b-1}$ - да за $\forall c > 0$ и $\forall b > 1$

$\Rightarrow T(n) = O(2^n)$

2) $T(n) = \Omega(2^n)$. Търсим $d > 0$: за дост. големи n: $T(n) \geq d.2^n$

$T(n) = 2T(n-1) + n \overset{ИП}{\geq} 2.d.2^{n-1} + n = d.2^n + n \geq d.2^n$ за $\forall d > 0$

$\Rightarrow T(n) = \Omega(2^n)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(2^n)$

Метод на характеристичното уравнение:

Нека k, m - фиксирани константи.
Нека a_i, b_i, c_i са конст. и $c_i \neq c_j$ за $i \neq j$; p_i - полиноми от цяла степен

$$T(n) = \underbrace{a_1 T(n-b_1) + a_2 T(n-b_2) + \ldots + a_k T(n-b_k)}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{c_1^n p_1(n) + \ldots + c_m^n p_m(n)}_{\text{нехомогенна част}}$$

$x^n = a_1 x^{n-b_1} + \ldots + a_k x^{n-b_k} \to \{\alpha_1 \ldots \alpha_r\}_M$ - корени

От нехомог. част: c_i се добавя $\deg(p_i(n)) + 1$ пъти.

Пр. $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + n.2^n + n^2 + 3^n =$
$= 2T(n-1) - T(n-2) + \underbrace{2^n.n + 1^n.n^2 + 3^n.1}$

$\hookrightarrow \{1,1,1,2,2,3\}_M$

$x^n = 2x^{n-1} - x^{n-2}$
$x^2 = 2x - 1$
$x^2 + 2x - 1 = 0$

$\{1,1\}_M$ Общо: $\{1,1,1,1,1,2,2,3\}_M$

$\Rightarrow T(n) = A.1^n + B.1^n.n + C.1^n.n^2 + D.1^n.n^3 + E.1^n.n^4 + F.2^n + G.2^n.n +$
$+ H.3^n$

Интересува ни само асимптотиката → гледаме кое е „най-голямо"

В случая 3^n, защото $3^n > 2^n.n^{1000}$ // Ние имаме $2^n.n^1$ само, но и по-голямо да беше, пак същото

$\Rightarrow T(n) \asymp 3^n$

Зад. • Ако имаме събираемо с a^n за $a \in (0,1) \Rightarrow$ можем да го игнорираме

• Ако имаме $a < 0$.

1сл. $a < 0$ не е най-голямо → няма проблем

$\{1,-2,3\}_M \Rightarrow T(n) = A.1^n + B(-2)^n + C.3^n$

за четни n: $T(n) = A.1^n + B.2^n + C.3^n = \Theta(3^n)$
за нечетни: $T(n) = A.1^n - B.2^n + C.3^n = \Theta(3^n)$

2сл $a < 0$ е най-голямо (по модул) → проблем!

$T(n) = A.1^n + B(-2)^n$

$T(n) < 0$ за дост. голямо $n \Rightarrow$ не може да кажем нищо и алг. извършва отрицателен брой стъпки ↯

Зад Да се решат следните рекурентни уравнения:

1. $T(n) = T(n-1) + 1$
2. $T(n) = T(n-2) + 2n$
3. $T(n) = 2T(n-1) + 2^n$
4. ✓ $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
5. $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$
6. ✓ $T(n) = 4T(n-2) + 3^n$
7. $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) + n.2^n$
8. ✓ $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + 2^n$
9. $T(n) = \sum_{i=1}^{n-2} T(i) + \left(\frac{3}{2}\right)^n$
10. ✓ $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$
11. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

Решение: 4) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$
$$x^2 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow D = 5 \rightarrow \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow T(n) = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \Theta(\varphi^n)$$

$-1 \leq \quad < 0$ клони към 0 при $n \to \infty$ ⇒ не ни интересува

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

6) $T(n) = 4T(n-2) + 3^n . n^0$

$$x^n = 4x^{n-2}$$
$$x^2 = 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \{-2; 2\}_M$$

Нехомогенна част: $\{3\}_M$

$$\Rightarrow T(n) = A.(-2)^n + B\,2^n + C.3^n = \Theta(3^n)$$

8)
$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + 2^n$$
$-$
$$T(n-1) = \sum_{i=1}^{n-2} T(i) + 2^{n-1}$$

$$T(n) - T(n-1) = T(n-1) + 2^n . \frac{1}{2}$$

$T(n) = 2T(n-1) + 2^n \cdot \frac{1}{2} n^0 \to \{2\}_M$

$x^n = 2x^{n-1}$
$x = 2$

Общо: $\{2,2\}_M$

$\Rightarrow T(n) = A \cdot 2^n + B \cdot 2^n \cdot n = \Theta(n \cdot 2^n)$

10) $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 1$

Пол. $n = 2^m$

$S(m) = 2 \cdot S(\frac{2^m}{2}) + 1 = 2S(m-1) + 1 \to \{1\}_M$

$x^m = 2x^{m-1}$
$x = 2 \Rightarrow \{2\}_M$

$S(m) = A \cdot 1^m + B \cdot 2^m = \Theta(2^m)$

$T(n) = \Theta(n)$

Зад. Намерете асимптотичната сложност на следния алгоритъм:

```
int g(int n) {
 if(n < 10) return 1;
 int j=6, s=0;
 while(j > 8) {
  s += g(n-2);
  j --;}
 while(n-j > 1) {
  j = n;
  s += g(n-1) + g(n-2);}
 while(j >= n) {
  j = 2;
  s += g(n-j);}
 return s;}
```

Решение:

– Първият цикъл няма да се изпълни нито веднъж: $j = 6 \not> 8$

– Вторият цикъл ще се изпълни точно веднъж
$n \geq 10,\ j = 6 \Rightarrow n - j > 1$ е истина
$\Rightarrow$ имаме две рекурсивни извиквания
Следващ път няма да се извика, защото $j = n$ и $n - j \not> 1$

– Третият цикъл също ще се изпълни точно веднъж.

Получаваме рекурентното уравнение:

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-2) + \Theta(1)$

$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 1^n \cdot n^0 \to \{1\}_M$

$x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2}$
$x^2 - x - 2 = 0 \to \{-1; 2\}_M$

$$\Rightarrow T(n) = A.(-1)^n + B.1^n + C.2^n = \Theta(2^n)$$

Зад Каква е асимптотиката на:

$$T(n) = T(n-2) + T(n-4) + \dots + \underbrace{T(n\%2)}_{T(0) \text{ или } T(1)}$$

Решение.

Разл. $T(n) - T(n-2) =$

$= T(n-2) + \cancel{T(n-4)} + \dots + \cancel{T(n\%2)} - (\cancel{T(n-4)} + \cancel{T(n-6)} + \dots + \cancel{T(n\%2)}) =$

$= T(n-2)$

Тоест $T(n) = 2T(n-2)$

$x^n = 2x^{n-2}$

$x^2 = 2 \Rightarrow \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}_M$

$T(n) = A.(-\sqrt{2})^n + B(\sqrt{2})^n = \Theta((\sqrt{2})^n)$

Мастър Теорема (МТ)

Нека $a \geq 1$, $b > 1$, $f(n)$ е положителна функция и

$k = \log_b a$. Тогава за $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ имаме, че

I сл: Ако $\exists \varepsilon > 0: n^{k-\varepsilon} \succeq f(n)$, то $T(n) \asymp n^k$

II сл: Ако $\exists t \geq 0, t \in \mathbb{Z}: n^k \lg^t(n) \asymp f(n)$, то

$$T(n) \asymp n^k . \lg^{t+1}(n)$$

III сл. Ако $\exists \varepsilon > 0$ $\exists c \in (0;1)$ и за достатъчно големи n (т.е. $\exists n_0 \geq 0$ т.че $\forall n \geq n_0$) е изп. че:

1) $a.f(\frac{n}{b}) \leq c.f(n)$ //Условие за регулярност

2) $n^{k+\varepsilon} \preceq f(n)$, то $T(n) \asymp f(n)$

Пр. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ //Merge sort

$a=2$ $b=2$ $k = \log_2 2 = 1$ $f(n) = n$

$? \exists \varepsilon > 0: \quad n^{1-\varepsilon} \succeq n$ - не

$? t \geq 0: \quad f(n) = n \asymp n^1 . \lg^t(n) \Rightarrow$ да, $t = 0$

От II сл. на МТ $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^k . \lg^{t+1}(n)) = \Theta(n \lg n)$

<u>Зад</u> Решете:

1. $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + n$
2. $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$
3. ✓ $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$
4. ✓ $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$ // Karatsuba
5. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$
6. $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg(n)$
7. $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$
8. $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 2n^2$
9. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \lg(n)$
10. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\lg(n)$
11. ✓ $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg^3(n)$
12. ✓ $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg(n)$

Решения: 3) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

$a = 2 \quad b = 4 \Rightarrow k = \log_4 2 = \frac{1}{2} \qquad f(n) = \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$

$n^k = n^{\frac{1}{2}} \asymp f(n) \Rightarrow$ II сл. на МТ за $t = 0$ имаме, че:

$T(n) \asymp n^{\frac{1}{2}} . \lg^{0+1}(n) = \sqrt{n} \lg n$

4) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$

$k = \log_2 3 \in (1, 2)$

$? \exists \varepsilon > 0: \quad n^{k-\varepsilon} \succeq n^1$, т.е. $k - \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon < k - 1$

Да, за $\forall \varepsilon \in (0; \log_2 3 - 1)$ е вярно че $n^{k-\varepsilon} \succ n^1 = f(n)$

$\Rightarrow$ I сл. на МТ: $T(n) \asymp n^k = n^{\log_2 3}$

11) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg^3(n)$

$k = \log_2 2 = 1$

Сравн. $n^k = n$ с $n \lg^3(n)$

II сл на МТ $\quad f(n) \asymp n^k . \lg^t(n)$ за $t = 3$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n . \lg^4(n))$

12) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg(n)$

$k = \log_2 5 \in (\log_2 4; \log_2 8) = (2;3)$

$\Rightarrow n^k = n^{\log_2 5} = n^2 . n^q$, където $q > 0$

Сравн n^k с $n^2 \lg(n)$ $/: n^2 > 0$, растяща

сравн. n^{k-2} с $\lg(n)$

?, $\exists \varepsilon > 0: n^{k-2-\varepsilon} \succcurlyeq \lg(n) \Rightarrow$ да, нека $\varepsilon = \frac{k-2}{2}$

$\Rightarrow n^{k-2-\varepsilon} = n^{\frac{k-2}{2}}$, където $\frac{k-2}{2} > 0$

$\Rightarrow n^{k-2-\varepsilon} \succcurlyeq \lg(n)$

Оттук, по I сл. на МТ $T(n) = \Theta(n^k) = \Theta(n^{\log_2 5})$

<u>Зад</u> Решете $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 2^n$

<u>Решение</u>: $k = \log_2 4 = 2$

Сравн $n^k = n^2$ с $f(n) = 2^n$

Знаем, че $\forall p > 0 \quad n^p \prec 2^n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad n^{k+\varepsilon} \prec 2^n$

$? \exists c \in (0;1)$, т.че за дост. големи n: $4.2^{\frac{n}{2}} \leq c.2^n$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{c} \leq 2^{\frac{n}{2}}$ – да, за кое да е $c \in (0;1)$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{III}}$ сл. на МТ: $T(n) \asymp 2^n$

<u>Зад</u> Намерете сложността по време на следният алг.:

```
AlgX(A[1..n])
s <- 42
for i <- 1 to n
    for j <- 1 to n
        s <- s + A[i] + A[j]
if n < 200
    return s
for k <- 1 to 81
    h <- k + ⌊n/3⌋ - 1
    s <- s + AlgX(A[k...h])
return s
```

Решение: От редове 2 и 3 имаме $\Theta(n^2)$ работа

На ред 9 извикване 81 пъти рекурсивно Alg x b/y

вход с размер $\Theta(\frac{n}{3})$

$\Rightarrow T(n) = 81\,T(\frac{n}{3}) + n^2$ ДР

ДР $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$ Дотук стигна времето

Зад. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + lg(n)$

I н пол. $n = 2^m \Leftrightarrow m = \lg n$

и $T(n) = T(2^m) = S(m)$

$T(\sqrt{n}) = T(n^{\frac{1}{2}}) = T((2^m)^{\frac{1}{2}}) = T(2^{\frac{m}{2}}) = S(\frac{m}{2})$

$\Rightarrow S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m \Rightarrow$ II сл. МТ: $S(m) = \Theta(m\lg m)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n . \lg\lg n)$

II н пол. $n = 2^{2^m}$ // $\lg n = 2^m$ $\lg\lg n = m$

$T(n) = T(2^{2^m}) = S(m)$

$T(\sqrt{n}) = T(n^{\frac{1}{2}}) = T((2^{2^m})^{\frac{1}{2}}) = T(2^{2^m \cdot \frac{1}{2}}) = T(2^{2^{m-1}}) = S(m-1)$

$\Rightarrow S(m) = 2S(m-1) + 2^m$

$\Rightarrow$ характ. уравн. $\rightarrow S(m) = A.2^m + Bm.2^m = \Theta(m.2^m)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(\lg\lg n . \lg m)$

III н. С развиване //Ако не знаем какво да правим

Развийте и вижте Лема 19, Следствие 12 от учебника.