Относно задачата от упражнението

Тодор Дуков

27 март 2024 г.

Разглеждаме следния алгоритъм:

```
unsigned square(unsigned n) { return n * n; }

unsigned f(unsigned n)
{
    if (n == 0)
        return 1;

    unsigned res = f(n - 1) + f(n - 1);

    if (n % 2 == 1)
        res += square(f(n / 2));
    else
        res += 3 * square(f((n - 1) / 2));

    return res;
}
```

Твърдение 1. *За всяко естествено* $\mathtt{n}$*, алгоритъмът* $\mathtt{f(n)}$ *връща* $\mathtt{3^n}$.

Доказателство. С пълна индукция по $\mathtt{n}$:

- $\mathtt{f(0)}$ връща $\mathtt{1} = \mathtt{3^0}$ ✓
- $\mathtt{f(2n+1)}$ връща $\mathtt{f(2n)} + \mathtt{f(2n)} + \mathtt{f(n)^2} \overset{\text{(ИП)}}{=} \mathtt{3^{2n}} + \mathtt{3^{2n}} + (\mathtt{3^n})^2 = \mathtt{3} \cdot \mathtt{3^{2n}} = \mathtt{3^{2n+1}}$ ✓
- $\mathtt{f(2n+2)}$ връща $\mathtt{f(2n+1)} + \mathtt{f(2n+1)} + \mathtt{3f(n)^2} \overset{\text{(ИП)}}{=} \mathtt{3^{2n+1}} + \mathtt{3^{2n+1}} + \mathtt{3}(\mathtt{3^n})^2 = \mathtt{3} \cdot \mathtt{3^{2n}} = \mathtt{3^{2n+1}}$ ✓

С това индукцията е завършена. □

За да изследваме сложността по време на $\mathtt{f(n)}$, ще покажем малко по-общ резултат. Нека $a, b \geq 1$.
Да разгледаме следното рекурентно уравнение:

$$T(0) = a$$
$$T(n) = 2T(n-1) + T(\tfrac{n}{2}) + b, \text{ при } n > 0$$

Крайната ни цел ще бъде да покажем, че $T(n) = \Theta(2^n)$. Интуиция имаме от това, че рекурентните уравнения $A(n) = 2A(n-1) + 1$ и $B(n) = B(\frac{n}{2}) + 1$ имат асимптотики съответно 2^n и $\log(n)$.

Твърдение 2. $T(n) = \Omega(2^n)$

Доказателство. С пълна индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $T(n) \geq 2^n$:

- $T(0) = a \geq 1 = 2^0$ ✓
- за $n > 0 : T(n) = 2T(n-1) + T(\frac{n}{2}) + b \geq 2 \cdot 2^{n-1} + 2^{\frac{2}{2}} + b \geq 2^n$ ✓

С това индукцията е завършена. □

По-трудно ще излезе обратното, че $T(n) = O(2^n)$. За целта нека първо покажем следното:

Твърдение 3. *За всяко* $n \geq 19$ *имаме, че* $(\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^{n-1} \leq -1$

Доказателство. Първо нека изложим следните еквивалентности:

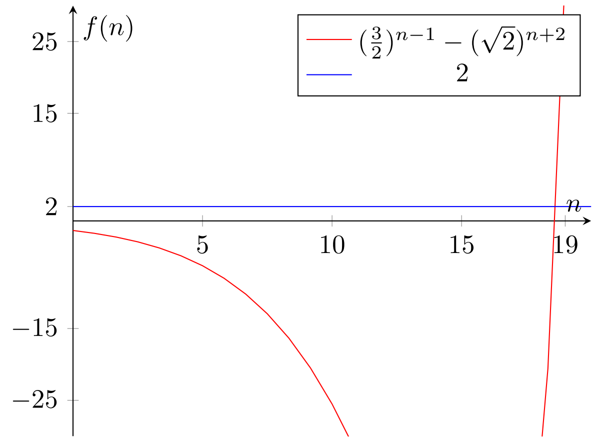
$$(\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^{n-1} \leq -1 \iff (\sqrt{2})^{n+2} - (\tfrac{3}{2})^{n-1} \leq -2 \iff (\tfrac{3}{2})^{n-1} - (\sqrt{2})^{n+2} \geq 2$$

След това човек лесно може да провери, че:

1. $(\frac{3}{2})^{19-1} - (\sqrt{2})^{19+2} \approx 29.737 \geq 2$, и
2. за $n > 19$ имаме $(\frac{3}{2})^{n-1} - (\sqrt{2})^{n+2} \geq (\frac{3}{2})^{19-1} - (\sqrt{2})^{19+2} \geq 2$ – функцията е монотонно растяща

Използвайки транзитивност на $\geq$ сме готови. □

Графиката на $(\frac{3}{2})^{n-1} - (\sqrt{2})^{n+2}$ ще изглежда така:



Първоначално функцията приема ниски стойности, понеже $\frac{3}{2}$ и $\sqrt{2}$ са близки и имат 3 степени разлика, което оказва голямо влияние в началото. Обаче после функцията бързо започва да расте.

Твърдение 4. $T(n) = O(2^n)$

Доказателство. Това, което ние трябва да покажем, е че има $n_0 \in \mathbb{N}$ и константа $c > 0$, за които за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено, че $T(n) \leq c \cdot 2^n$. За съжаление няма да може да се покаже това директно.
Въпреки че на пръв поглед звучи контраинтуитивно, ние ще покажем нещо по-силно – има константа $c > 0$, за която за всяко $n \geq 1$ е изпълнено, че $T(n) \leq c(2^n - (\frac{3}{2})^n)$. Това ще направим с пълна индукция по n:

- За базата нека $1 \leq n \leq 18$. Ясно е, че можем да изберем c, за което:

$$b \leq c \text{ и } T(n) \leq c(2^n - (\tfrac{3}{2})^n) \text{ за } 1 \leq n \leq 18$$

Например можем да вземем $c = \max\{b, \max\{\frac{T(n)}{2^n - (\frac{3}{2})^n} \mid 1 \leq n \leq 18\}\}$.

- Нека за индукционната стъпка $n \geq 19$. Тогава:

$$\begin{aligned}
T(n) = 2T(n-1) + T(\tfrac{n}{2}) + b &\overset{\text{(ИП)}}{\leq} c(2 \cdot 2^{n-1} - 2(\tfrac{3}{2})^n) + c(2^{\frac{n}{2}} - (\tfrac{3}{2})^{\frac{n}{2}}) + b && \text{// дистрибутивност} \\
&= c(2^n - 2(\tfrac{3}{2})^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} - (\tfrac{3}{2})^{\frac{n}{2}}) + b && \text{// махаме } -(\tfrac{3}{2}^n) \\
&\leq c(2^n - 2(\tfrac{3}{2})^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}) + b && \text{// } 2(\tfrac{3}{2})^{n-1} = \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2})^{n-1} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^{n-1} \\
&= c(2^n - (\tfrac{3}{2})^n) + c(2^{\frac{n}{2}} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^{n-1}) + b && \text{// } 2^{\frac{n}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^n = (\sqrt{2})^n \\
&= c(2^n - (\tfrac{3}{2})^n) + c((\sqrt{2})^n - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^{n-1}) + b && \text{// Твърдение 3 и } n \geq 19 \\
&\leq c(2^n - (\tfrac{3}{2})^n) + c(-1) + b && \text{// } b \leq c \\
&\leq c(2^n - (\tfrac{3}{2})^n)
\end{aligned}$$

□

Следствие. $T(n) = \Theta(2^n)$

Следствие. *Алгоритъмът* `f(n)` *има сложност по време* $\Theta(2^n)$