

# Лекция 6: Комбинаторни конфигурации (структури)

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика  
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

5 ноември 2024 г.

Дадено е *опорно множество*  $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$ , от чиито елементи ще изграждаме комбинаторните конфигурации. На английски терминът е *ground set*.

Конфигурациите (структурите) може да се изградят с наредба или без наредба, а също така и с повтаряне или без повтаряне. Това дава общо четири възможности. “Наредба” означава линейна наредба.

С “ $m$ ” означаваме *големината* на дадена конфигурация. Тоест, броят на елементите в нея.

Множеството от конфигурациите с наредба и повтаряне с големина  $m$  над опорно множество с кардиналност  $n$  означаваме с " $K_{H,\Pi}(n, m)$ ". Елементите му са наредените  $m$ -торки (векторите с големина  $m$ ), чиито елементи са от опорното множество  $A$ . Лесно се вижда, че  $K_{H,\Pi}(n, m) = A^m$ .

Интересува ни  $|K_{H,\Pi}(n, m)|$ . С обобщения принцип на умножението извеждаме

$$|K_{H,\Pi}(n, m)| = |A^m| = n^m \quad (1)$$

# Конфигурации с наредба и повтаряне (2)

## Пример

Нека  $A = \{a, b, c\}$ . Нека  $m = 2$ . Тогава  $K_{H,P}(3, 2) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ .

# Конфигурации с наредба, без повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина  $m$  над опорно множество с кардиналност  $n$  означаваме с " $K_H(n, m)$ ". Елементите му са наредените  $m$ -торки (векторите с големина  $m$ ) без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество  $A$ .

Интересува ни  $|K_H(n, m)|$ . Представяме си процеса на изграждането на някой от тези вектори. За първата позиция можем да изберем всеки елемент на  $A$ , следователно имаме  $n$  възможности. За втората позиция имаме само  $n - 1$  възможности, защото елементът от  $A$ , избран за първата позиция, вече не може да се ползва. Аналогично, за третата позиция има само  $n - 2$  възможности, и така нататък, за  $m$ -тата позиция имаме само  $n - (m - 1)$  възможности.

# Конфигурации с наредба, без повтаряне (2)

Виждаме, че

$$|K_H(n, m)| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) \quad (2)$$

$n - m + 1$  идва от  $n - (m - 1)$ .

Дясната страна на (2) може да се напише и като  $\prod_{k=0}^{m-1} (n - k)$ , а освен това и като  $n^m$ . Последното се чете “ $n$  на падаща степен  $m$ ”.

**Този резултат не се получава от принципа на умножението.**

Резултатът остава в сила и при  $m > n$ . Тогава дясната страна на (2) е нула.

# Конфигурации с наредба, без повтаряне (3)

## Пример

Нека  $A = \{a, b, c\}$ . Нека  $m = 2$ . Тогава

$$K_H(3, 2) = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}.$$

Това не е изведено чрез принципа на умножението. Имаме  $|K_H(3, 2)| = 3 \cdot 2 = 3^2 = 6$ , но  $K_H(3, 2)$  не е декартово произведение нито на триелементно и двуелементно множество, нито на шестелементно и едноелементно множество. Както на първа, така и на втора позиция се срещат и трите елемента на  $A$ .

# Конфигурации с наредба, без повтаряне (4)

Друг пример

Нека  $A = \{a, b, c\}$ . Нека  $m = 4$ . Но  $K_H(3, 4) = \emptyset$ , тъй като е невъзможно да не потворим елемент от  $A$  съгласно принципа на Dirichlet.

Забележете, че дясната страна на (2) става именно нула:

$$3^4 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Не е необходимо да изискваме  $m \leq n$ .



# Конфигурации с наредба, без повтаряне (5)

## Пермутации

Важен частен случай е  $n = m$ . Тогава векторите се наричат *пермутации*. Пермутациите на  $n$  на брой, два по два различни обекта (pairwise distinct), са разполаганията в линейна наредба на тези обекти.

Дясната страна на (2) става  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . Това бележим с " $n!$ ". Чете се "ен-факториел", на английски е *factorial*. И така,

$$|K_H(n, n)| = n!$$

Примерно, по колко начина могат да се наредят 12 човека в редица? Отговорът е  $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$ .

# Конфигурации с наредба, без повтаряне (6)

Колко е  $0!$ !

В сила е  $0! = 1$ . Комбинаторно, това може да се изведе така: по колко начина можем да разположим нула обекта в редица? Отговор: по един начин, а именно празния начин.

Алгебрично, същото можем да изведем така:

$$\prod_{k \in \emptyset} k = 1$$

Вземаме неутралния елемент на умножението, който е единицата, а не нулата.

Странична забележка: нулата е неутралният елемент на събирането, поради което

$$\sum_{k \in \emptyset} k = 0$$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (1)

Множеството от конфигурациите без наредба, без повтаряне с големина  $m$  над опорно множество с кардиналност  $n$  означаваме с " $K(n, m)$ ". Елементите му са  $m$ -елементните подмножества на опорното множество  $A$ .

Наричат се още *комбинации*. Този термин обаче се използва широко за какво ли не. Точният термин е "подмножество".

## Конфигурации без наредба и без повтаряне (2)

Интересува ни  $|K(n, m)|$ . Пресмята се от  $|K_H(n, m)|$  чрез принципа на делението. Въвеждаме релация  $R \subseteq K_H(n, m) \times K_H(n, m)$  така:

$\forall X, Y \in K_H(n, m) : X R Y \leftrightarrow X$  и  $Y$  имат едни и същи елементи

$R$  е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност има кардиналност  $m!$ , а  $|K(n, m)|$  е броят на класовете на еквивалентност, като

$$|K(n, m)| = \frac{|K_H(n, m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} \quad (3)$$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (3)

Пример с фиш от тото 6/49. Колко са възможните фишове?  
Отговорът  $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$  е грешен.

Верният отговор е

$$\frac{10\,068\,347\,520}{6!} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816$$

Причината да делим на  $6! = 720$  е, че няма значение в какъв ред се изтеглят числата. Ако и редът на изтегляне имаше значение, фишовете наистина щяха да са  $10\,068\,347\,520$ . Но това би била друга игра.

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (4)

## Биномен коефициент

Понякога (3) се записва така:

$$|K(n, m)| = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (4)$$

Въпреки че (4) е по-кратък и “по-спретнат” запис, като алгоритъм (3) е по-бърз.

Дясната страна на (3) и (4) се нарича *биномен коефициент*, на английски *binomial coefficient*, и се бележи кратко с “ $\binom{n}{m}$ ”. Чете се “ен-над-ем”, на английски “n-choose-m”. И така,

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

$n$  е *горен индекс*, а  $m$  е *долен индекс*. Да не се бърка  $\binom{n}{m}$  с  $\left(\frac{n}{m}\right)$ .

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (5)

## Свойства на биномния коефициент (1)

Дефинираме  $\binom{n}{m}$  за  $m, n \in \mathbb{N}$ . Ако  $m > n$ , то  $\binom{n}{m} = 0$ , което има комбинаторен смисъл: има нула начина да изберем  $m$  елементно подмножество на  $A$ , ако  $|A| = n$  и  $m > n$ .

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ . Също има комбинаторен смисъл: има точно един начин да изберем нула неща от  $n$  (не избираме нищо, тоест избираме празното множество) и има точно един начин да изберем  $n$  неща от  $n$  (избираме всичко).

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ . Има  $n$  начина да изберем едно нещо от  $n$ . Има  $n$  начина да изберем  $n - 1$  неща от  $n$ .

Изобщо, при  $m \leq n$ , в сила е  $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ . Това също има комбинаторен смисъл: като брой начини да го сторим, все едно е дали избираме  $m$  неща от  $n$  или  $n - m$  неща от  $n$ . Примерно, тото  $6/49$  можеше да е  $43/49$ .

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (6)

## Свойства на биномния коефициент (2)

При фиксиран горен индекс  $n$ , сумата от всички биномни коефициенти е  $2^n$ :

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_n + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_n + \underbrace{\binom{n}{n}}_1 = 2^n \quad (5)$$

И това има комбинаторен смисъл. Дясната страна броеви всички подмножества на  $n$ -елементно множество, а знаем, че те са  $2^n$ ; това се извежда тривиално с броене на характеристичните вектори с дължина  $n$ , които са  $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$ . Лявата страна броеви разбиването на всички подмножества по кардиналности.

Това е пример за *доказателство с комбинаторни съображения*, или *принцип на двукратното броене*.



# Конфигурации без наредба и без повтаряне (7)

## Свойства на биномния коефициент (3)

Ако  $n, m \geq 1$ , в сила е

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (6)$$

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна брой  $m$ -елементните подмножества на  $n$ -елементно множество  $A$ . Дясната страна брой същото, но по-детайлно. Фиксираме произволен  $a \in A$ .

- $m$ -елементните подмножества, които **не съдържат**  $a$ , са  $\binom{n-1}{m}$ , защото  $|A \setminus \{a\}| = n - 1$ , а  $A \setminus \{a\}$  е множеството, от което можем да избираме.
- $m$ -елементните подмножества, които **съдържат**  $a$ , са  $\binom{n-1}{m-1}$ , защото след като изберем  $a$ , останалите  $m - 1$  на брой пак избираме от  $A \setminus \{a\}$ .

По принципа на разбиването  $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ .

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (8)

Свойства на биномния коефициент (4): триъгълникът на Pascal

Клетката на ред  $n$  и колона  $k$  съдържа  $\binom{n}{k}$ . Всеки “вътрешен” елемент е сумата от елемента над него и елемента горе вляво; тоест,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ .

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

### Теорема 1 (Newton)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

“Бином” означава буквално “двуйменник”. На български е прието “двучлен”. Имената са  $x$  и  $y$ .

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна записваме като

$$\underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y) \cdot (x + y)}_{n \text{ множителя}}$$

Очевидно след отварянето на скобите ще се получи сума от  $2^n$  събираеми от вида  $x^k y^{n-k}$ , по всички  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (9)

Нютонов бином (2)

Разбиваме множеството от събираемите в  $n + 1$  множества по степента на  $x$  (която диктува степента на  $y$ ):  $x^0y^n, x^1y^{n-1}, \dots, x^ny^0$ . Коефициентът пред  $x^ky^{n-k}$  е броят на появите на това събираемо. За да определим този брой, съобразяваме, че  $x^k$  “идва” от  $k$  на брой множителя (останалите множители дават  $y^{n-k}$ ). А тези  $k$  множителя можем да изберем от всички  $n$  множителя по  $\binom{n}{k}$  начина.

Примерно,  $x^ny^0$  се появява само веднъж, понеже за него трябва да “дойде”  $x$  от всеки множител.  $x^{n-1}y^1$  се появява точно  $n$  пъти, защото от един множител “идва”  $y$ , от останалите,  $x$ , а този един множител можем да изберем по  $n$  начина. И така нататък. □

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (10)

Нютонов бином (4)

С Теоремата на Newton лесно извеждаме (5): полагаме  $x = y = 1$ .

Лесно доказваме и

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Записваме лявата страна като  $(2 + 1)^n$ , дясната страна като  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$  и прилагаме Теорема 1.

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (11)

Свойства на биномния коефициент (5)

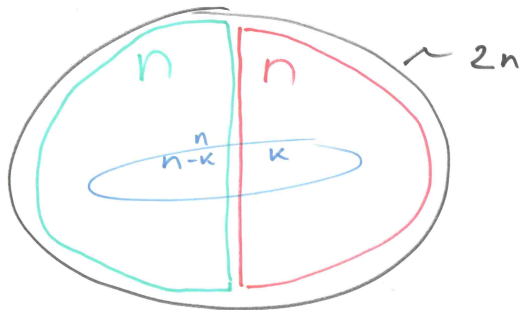
Ще докажем с комбинаторни разсъждения, че

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (12)

Свойства на биномния коефициент (6)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$



# Конфигурации без наредба и без повтаряне (13)

Свойства на биномния коефициент (7): бин. коеф. брой и наредени структури

По колко начина можем да сложим  $p$  единици и  $q$  нули в редица?

Общо  $p + q$  булеви цифри. Това са характеристичните вектори с дължина  $p + q$  и точно  $p$  единици. Те съответстват биективно на  $p$ -елементните подмножества на  $(p + q)$ -елементно множество. Ние вече знаем колко са тези подмножества:  $\binom{p+q}{p}$ .  
Тогава и въпросните характеристични вектори са толкова.

Можем да го запишем и като  $\binom{p+q}{q}$ .



# Конфигурации без наредба и без повтаряне (14)

## Свойства на биномния коефициент (8)

Да се докаже тъждеството  $\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k}$ . Можем да го докажем алгебрично с (6) така:

$$\begin{aligned}\binom{n+m}{m} &= \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} \\ \binom{n+m-1}{m-1} &= \binom{n+(m-1)-1}{m-1} + \binom{n+(m-1)-1}{(m-1)-1} \\ \binom{n+m-2}{m-2} &= \binom{n+(m-2)-1}{m-2} + \binom{n+(m-2)-1}{(m-2)-1} \\ &\dots \\ \binom{n+m-(m-1)}{m-(m-1)} &= \binom{n+m-(m-1)-1}{m-(m-1)} + \binom{n+m-(m-1)-1}{m-(m-1)-1} \\ \binom{n+m-m}{m-m} &= \binom{n+m-m-1}{m-m} + \binom{n-1}{-1}\end{aligned}$$

---

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1} + \dots + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{0}$$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (15)

## Свойства на биномния коефициент (9)

Интерпретация в триъгълника на Pascal на

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1} + \dots + \binom{n-1}{0}$$

Примерно,

$$\binom{6+6}{6} = \binom{11}{6} + \binom{10}{5} + \binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{5}{0}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (16)

## Свойства на биномния коефициент (10)

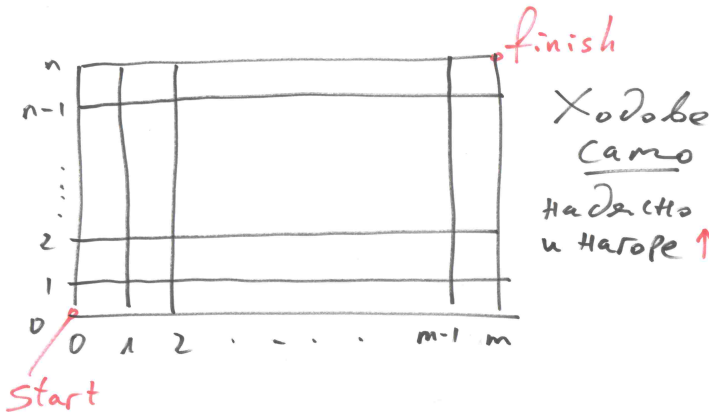
Има интересно доказателство с комбинаторни съображения на

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k}$$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (17)

Свойства на биномния коефициент (11)

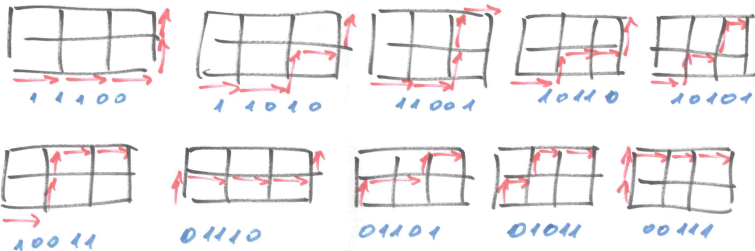
Разходки в мрежа  
(lattice walks)



# Конфигурации без наредба и без повтаряне (18)

Свойства на биномния коефициент (12)

$\rightarrow = 1$   $\uparrow = 0$

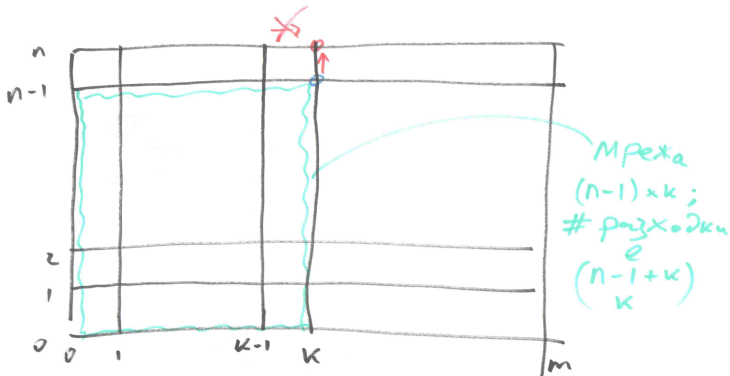


При  $m=3$ ,  $n=2$ , # на разходките  
е  $10 = \binom{2+3}{2} = \binom{2+3}{3}$ . Това не е  
случайно!

В  $n \times m$  мрежа, # на разх. е  $\binom{n+m}{m}$

# Конфигурации без наредба и без повтаряне (19)

Свойства на биномния коефициент (13)



$$0 \leq k \leq m$$

Разбиваме разходките по  $k$ :  
Вертикалът, на който за първи път  
"излизаме" най-горе;  $\binom{n+m}{m} = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{n-1+k}{k}$

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (1)

Комб конф с повт, без наред.

$$K_n(n, m)$$

Елементите са мулти-в.в. с големите  $m$  над  $n$ -ел. опорно м.в.

$$|K_n(n, m)| = ?$$

## Конфигурации без наредба, с повтаряне (2)

Нека  $A = \{a, b\}$ , нека  $m = 5$ .

$$K_{\Pi}(2, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{a, a, a, a, b\}_m, \\ \{a, a, a, b, b\}_m, \\ \{a, a, b, b, b\}_m, \\ \{a, b, b, b, b\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m \end{array} \right\}$$



# Конфигурации без наредба, с повтаряне (3)

Нека  $A = \{a, b\}$ , нека  $m = 5$ .

$$K_n(2, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{a, a, a, a, b\}_m, \\ \{a, a, a, b, b\}_m, \\ \{a, a, b, b, b\}_m, \\ \{a, b, b, b, b\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m \end{array} \right\}$$

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (4)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_n(3,5)| = ?$$

$$K_n(3,5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \\ \{a, b, b, c, c\}_m, \\ \vdots \\ \{c, c, c, c, c\}_m \end{array} \right\} K_n(2,5)$$

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (5)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_n(3, 5)| = ?$$

$$K_n(3, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \\ \{a, b, b, c, c\}_m, \\ \vdots \\ \{c, c, c, c, c\}_m \end{array} \right\} K_n(2, 5)$$

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (6)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_{\Pi}(3, 5)| = ?$$

$$K_{\Pi}(3, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \end{array} \right\} K_{\Pi}(2, 5)$$

$$* \left( \begin{array}{c} * * | * * \\ * * | * * \\ \vdots \\ * * | * * \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, b, b, c, c\}_m, \\ \vdots \\ \{c, c, c, c, c\}_m \end{array} \right\}$$

$m$  '\*'

$n-1$  '|'

$$K_{\Pi}(n, m) = \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (7)

Пример с билети

12 еднакви билета се раздават на 10 човека. По колко начина може да стане това?

Решение: множеството от хората е опорното множество. Броят на билетите е големината на конфигурацията. Тогава  $n = 10$ ,  $m = 12$ . Отговорът е

$$\binom{12 + 10 - 1}{12} = \binom{12 + 10 - 1}{10 - 1} = 293\,930$$

Едно от раздаванията:

\*\* ||| || \*\* \* || \* | \* \* \* \* \* | \* |

Първи човек с два билета; втори, трети и четвърти с по нула билети, петия човек с три билета, шестият без билети, седмият с един билет, осмият с пет билета, деветият с един билет и десетият без билети.

# Конфигурации без наредба, с повтаряне (7)

Пример с тото

Колко са фишовете в 6 от 49, ако след изтегляне на топка тя веднага се връща в сферата?

Отговор:

$$\binom{49 + 6 - 1}{6} = 25\,827\,165$$

# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (1)

Пример с плодове. (1)

Аранжор на витрина в плод-зеленчук трябва да сложи в редица 10 ябълки, 15 круши и 20 кивита. По колко начина може да го стори, ако плодовете от всеки вид са неразличими?

Първо решение. Общо са 45 плодове. Представяме си процеса на нареждането. Започва с 45 свободни “слота”.

- Първо слага ябълките. Има  $\binom{45}{10} = 3\,190\,187\,286$  начина.
- На останалите 35 свободни слотове слага крушите. Има  $\binom{35}{15} = 3\,247\,943\,160$  начина.
- На останалите 20 свободни слотове слага кивитата. Има  $\binom{20}{20} = 1$  начина.

Отговорът е  $\binom{45}{10} \cdot \binom{35}{15} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$ .

# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (2)

Пример с плодове. (2)

Може да започнем с крушите, а после ябълките и накрая кивитата. Тогава отговорът е

$$\binom{45}{15} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760.$$

А може да започнем с кивитата, после крушите и накрая ябълките. Тогава отговорът е

$$\binom{45}{20} \cdot \binom{25}{15} \cdot \binom{10}{10} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760.$$

Естествено, отговорът не зависи от реда на слагане на видовете плодове. Всеки от  $3! = 6$  различни избора на първи, втори и трети вид плод води до един и същи отговор.



# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (3)

Пример с плодове. (3)

Друго решение. В началото всеки от 45-те плодове има идентичност. Има  $45! =$

119 622 220 865 480 194 561 963 161 495 657 715 064 383 733 760 000 000 000  
начина за слагането им.

После правим 10 от тях неразличими помежду си, други 15 неразличими помежду си и останалите 20 също неразличими помежду си. По принципа на делението, начините стават

$$\frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$$

# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (3)

Пример с трином. (1)

Да разгледаме тринома  $(x + y + z)^{45}$ . Ясно е, че отварянето на скобите води до събираеми от вида  $x^k y^\ell z^m$ , където  $k + \ell + m = 45$ . Какъв е коефициентът пред  $x^{10} y^{15} z^{20}$ ?

Отговорът е  $\binom{45}{10} \cdot \binom{35}{15} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$ .

Един начин да стигнем до този отговор е: пита се, колко са събираемите  $x^{10} y^{15} z^{20}$  след отваряне на скобите? Вземаме десет  $x$ -а от 45 множителя, има  $\binom{45}{10}$  да изберем кои множители. От останалите 35 множителя избираме 15 за  $y$ -ците, има  $\binom{35}{15}$  начина. За  $z$ -овете има един избор.

Друг начин да запишем същия отговор е  $\frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!}$ .

# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (4)

## Пример с трином. (2)

$x + y + z$  е *трином*. В сила е следното обобщение на теоремата на Newton:

$$(x + y + z)^n = \sum_{k+\ell+m=n} \frac{n!}{k! \cdot \ell! \cdot m!} x^k y^\ell z^m$$

Изразът  $\frac{n!}{k! \cdot \ell! \cdot m!}$ , където  $k + \ell + m = n$ , има същата стойност като  $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{\ell}$ . Използваме следната кратка нотация за него:

$$\binom{n}{k, \ell, m}$$

Нарича се *триномен коефициент* по очевидни причини.

Използвайки тази нотация, триномът се записва така:

$$(x + y + z)^n = \sum_{k+\ell+m=n} \binom{n}{k, \ell, m} x^k y^\ell z^m$$

Още по-голямо обобщение е

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

Изразът  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ , където  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , има същата стойност като  $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$ . За него се ползва следната нотация:  $\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}}$ . Нарича се *мултиномен коефициент* по очевидни причини. Биномният коефициент  $\binom{n}{k}$ , написан като мултиномен коефициент, е  $\binom{n}{k, n-k}$ .

Мултиномният коефициент брой пермутации с повторения (пермутации на мултимножество). Биномният коефициент, като частен случай на мултиномен коефициент, брой пермутации на мултимножество с два вида елементи; примерно, 0 и 1.

# Пермутации с повторения. Мултиномен коефициент. (6)

Колко са събираемите в  $\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \dots$

Сумата

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

има точно  $\binom{n+k-1}{k-1}$  събираеми. Ето защо:  $n_1, \dots, n_k$  са естествени числа, така че всяко от тях е сума от нула или повече единици, като съвкупно тези единици са точно  $n$  на брой. Променливите  $n_1, \dots, n_k$  имат идентичности, но единиците (които са  $n$  на брой) нямат. И така, става дума за конфигурации без наредба на  $n$ -елементни мултимножества над  $k$ -елементно опорно множество.

В частност, ако  $k = 2$ , броят на събираемите е  $\binom{n+2-1}{2-1} = n + 1$ ; наистина, биномът има толкова събираеми. Ако  $k = 3$ , събираемите са  $\binom{n+2}{2}$ . И така нататък.

Обикновените пермутации са частен случай на пермутации с повторения, също както обикновените множества са частен случай на мултимножества. Наистина,

$$n! = \binom{n}{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n} = \frac{n!}{\underbrace{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1!}_n}$$

# Какво е добър отговор на комбинаторна задача (1)

Дадена е група  $A$  от  $n$  студента. Дадени са  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , такива че  $k + \ell \leq n$ . По колко начина можем да изберем подгрупа  $B$  от  $k$  студента и подгрупа  $C$  от  $\ell$  студента, така че факултетните номера на хората от  $B$  да са по-малки от фак. номера на хората от  $C$ ?

Първо решение. По принципа на разбиването:

$$\sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

Второ решение. Достатъчно е да изберем  $k + \ell$ .

$$\binom{n}{k + \ell}$$

## Какво е добър отговор на комбинаторна задача (2)

Второто решение е по-добро, защото е по-бърз алгоритъм. Върху Maple 2018 (tm), за  $n = 10\,000$ ,  $k = \ell = 500$ , имплементацията на второто решение отнема около 0.031 секунди, а на първото, около 20.859 секунди.

Всяка смислена формула задава алгоритъм. Добро е решение е формула, която задава бърз алгоритъм. А не формула, която е кратка и “спретната”. За първото решение ние може да си дефинираме нотация

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k; \ell \end{matrix} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

но това си остава бавен алгоритъм.



КРАЙ