Примерни решения на Домашно №1

**Задача 1:** Ако $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$, *отвореният интервал* $(x, y)$ по дефиниция е следното множество: $\{a \in \mathbb{R} \,|\, x < a < y\}$. Нека $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ и нека са дадени отворени интервали $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$, като $x_i < y_i$ за $1 \leq i \leq n$. Нека $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) \neq \emptyset$, за $1 \leq i < j \leq n$.

Докажете по индукция по $n$, че $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \neq \emptyset$.

**Решение:** На прост български, иска се да се докаже по индукция, че ако измежду $n$ отворени интервала, всеки двойка интервали имат непразно сечение, то всички интервали имат непразно сечние. Дали интервалите са отворени или затворени е без значение за истинността на твърдението.

Първо едно помощно твърдение.

**Лема 1:** Нека $\mathcal{I}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathcal{I}_2 = (x_2, y_2)$ и $\mathcal{I}_3 = (x_3, y_3)$ са отворени интервали, такива че $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \neq \emptyset$, $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset$ и $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset$. Тогава $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset$.

**Доказателство:** Да разгледаме два произволни отворени интервала $\mathcal{A} = (a, b)$ и $\mathcal{C} = (c, d)$. Забелязваме, че

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad d \leq a \ \vee \ b \leq c \tag{1}$$

Отрицанието на дясната страна на (1), съгласно закона на De Morgan, е

$$\neg(d \leq a \vee b \leq c) \quad \equiv \quad \neg(d \leq a) \wedge \neg(b \leq c) \quad \equiv \quad a < d \ \wedge \ c < b$$

И така,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset \quad \leftrightarrow \quad a < d \ \wedge \ c < b \tag{2}$$

Прилагаме (2) към нашата задача: щом $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, в сила е

$$s_1 < f_2 \ \wedge \ s_2 < f_1$$

Но също така е вярно и

$$s_1 < f_1 \ \wedge \ s_2 < f_2$$

понеже $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ са отворени интервали. Тогава

$$\max\{s_1, s_2\} < \min\{f_1, f_2\}$$

Нещо повече, $\big(\max\{s_1, s_2\}, \min\{f_1, f_2\}\big)$ е $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

Ще докажем, че

$$\big(\max\{s_1, s_2\}, \min\{f_1, f_2\}\big) \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset \tag{3}$$

Допускаме противното. Тогава, съгласно (1), в сила е

$$f_3 \leq \max\{s_1, s_2\} \ \vee \ \min\{f_1, f_2\} \leq s_3 \tag{4}$$

Да допуснем, че $f_3 \leq \max\{s_1, s_2\}$.

- Ако $\max\{s_1, s_2\} = s_1$, имаме $f_3 \leq s_1$. Тогава $\mathcal{I}_3$ има празно сечение с $\mathcal{I}_1$, в противоречие с условието на задачата.
- Ако $\max\{s_1, s_2\} = s_2$, имаме $f_3 \leq s_2$. Тогава $\mathcal{I}_3$ има празно сечение с $\mathcal{I}_2$, в противоречие с условието на задачата.

Получените противоречия показват, че не е вярно, че $f_3 \leq \max\{s_1, s_2\}$. Да допуснем, че $\min\{f_1, f_2\} \leq s_3$.

- Ако $\min\{f_1, f_2\} = f_1$, имаме $f_1 \leq s_3$. Тогава $\mathcal{I}_3$ има празно сечение с $\mathcal{I}_1$, в противоречие с условието на задачата.
- Ако $\min\{f_1, f_2\} = f_2$, имаме $f_2 \leq s_3$. Тогава $\mathcal{I}_3$ има празно сечение с $\mathcal{I}_2$, в противоречие с условието на задачата.

Получените противоречия показват, че не е вярно, че $\min\{f_1, f_2\} \leq s_3$.

Щом нито $f_3 \leq \max\{s_1, s_2\}$ е вярно, нито $\min\{f_1, f_2\} \leq s_3$ е вярно, то и (4) не е вярно. Тогава допускането ни е невярно, така че в сила е (3). Но при положение, че $\big(\max\{s_1, s_2\}, \min\{f_1, f_2\}\big)$ е $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, (3) е същото като

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset$$

Което и трябваше да докажем. $\square$

Две заключителни забележки. Първо, фактът, че интервалите са отворени, е без значение за верността на лемата. Аналогичното твърдение за затворени интервали се доказва с аналогично доказателство. Второ, лемата може да е очевидна, но трябва да се докаже: за произволни три множества $X$, $Y$ и $Z$ не е вярно, че конюнкцията $X \cap Y \neq \emptyset \wedge X \cap Z \neq \emptyset \wedge Y \cap Z \neq \emptyset$ влече $X \cap Y \cap Z = \emptyset$.

**База:** Базовият случай е $n = 2$. Твърдението става "ако $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \neq \emptyset$, то $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \neq \emptyset$", което е тривиално вярно. ✓

**Индуктивно предположение:** Допускаме, че твърдението е вярно за всеки $n$ на брой отворени интервала, за някакво $n$, такова че $n \geq 2$.

**Индуктивна стъпка:** Разглеждаме произволни $n+1$ интервала $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_{n+1}$, всеки два от които имат непразно сечение. Разглеждаме $\mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1}$. Това множество е непразно; нещо повече, то е отворен интервал, понеже непразното сечение на отворени интервали е отворен интервал. Да кажем, че $\mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1}$ се нарича $\mathcal{I}'$.

Разглеждаме интервалите $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}, \mathcal{I}'$. Това са $n$ на брой интервала. По конструкция, за всяко $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ е вярно, че $\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_n \neq \emptyset$ и $\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$. И освен това $\mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$. Тогава, съгласно Лема 1

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : \mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$$

Но това е същото като

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : \mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}' \neq \emptyset \tag{5}$$

И освен това, по конструкция,

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n-1\} : j < k \ \rightarrow \ \mathcal{I}_j \cap \mathcal{I}_k \neq \emptyset \tag{6}$$

От (5) и (6) заключаваме, че $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}, \mathcal{I}'$ са $n$ на брой интервала, всеки два от които имат непразно сечение. Прилагаме индуктивното предположение и заключаваме, че

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_{n-1} \cap \mathcal{I}' \neq \emptyset \tag{7}$$

Предвид факта, че $\mathcal{I}' = \mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1}$, (7) става

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_{n-1} \cap \mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$$

Което и трябваше да докажем. $\square$

**Задача 2:** Нека $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $x$, $y$ и $z$ са прости съждения. Разгледайте следното съставно съждение:

$$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p)))))))$$

Какво е това съждение: тавтология, условност или противоречие? Обосновете добре отговорите си.

**Решение:** Да опростим израза, използвайки еквивалентни преобразувания.

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p))))))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (\neg z \lor p))))))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (\neg y \lor (\neg z \lor p))))))) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (\neg y \lor \neg z \lor p)))))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (\neg x \lor (\neg y \lor \neg z \lor p)))))) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (\neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p))))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (r \to (s \to (\neg t \lor (\neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p))))) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (q \to (r \to (s \to (\neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p)))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (r \to (\neg s \lor (\neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p)))) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (q \to (r \to (\neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p))) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (q \to (\neg r \lor (\neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p))) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (q \to (\neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p)) \equiv$ // закон за импликацията

$p \to (\neg q \lor (\neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p)) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$p \to (\neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p) \equiv$ // закон за импликацията

$\neg p \lor (\neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \lor p \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor p \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor p \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor p \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor p \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor p \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \lor \neg q \lor p \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$(\neg p \lor p) \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z \equiv$ // свойство на отрицанието

$\top \lor (\neg q \lor \neg r \lor \neg s \lor \neg t \lor \neg x \lor \neg y \lor \neg z) \equiv$ // свойство на константата $\top$

$\top$

Оказва се, че даденото съставно съждение е тавтология.

**Задача 3:** Нека $S$ е опорното множество в тази задача. Допуснете, че $S$ е крайно и непразно. Нека $\mathbf{\Pi}(S) = \left\{ X \in 2^{2^S} \mid X \text{ е разбиване на } S \right\}$. За всеки $X, Y \in \mathbf{\Pi}(S)$ казваме, че $X$ *рафинира* $Y$, ако

$$\forall A \in X \;\; \exists B \in Y : A \subseteq B.$$

Дефинираме релацията $\sqsubseteq_S \subseteq \mathbf{\Pi}(S) \times \mathbf{\Pi}(S)$ така

$$\forall X, Y \in \mathbf{\Pi}(S) : X \sqsubseteq_S Y \text{ тстк } X \text{ рафинира } Y.$$

*10 т.* • Докажете, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба.

*5 т.* • Нарисувайте диаграмата на Hasse на $\sqsubseteq_S$, ако $S = \{a, b, c, d\}$.

**Решение:** Първо ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба. Забелязваме, че в дефиницията на "рафинира", множеството $B$, което съдържа множеството $A$ като подмножество, е едно единствено, понеже $Y$ е разбиване, поради което елементите на $B$ не може да се съдържат в никой друг дял на $Y$ освен $B$. Така че "$X$ рафинира $Y$" може да се дефинира и така:

$$\forall A \in X \;\; \exists! B \in Y : A \subseteq B.$$

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е рефлексивна. Това е същото като да докажем, че всяко разбиване рафинира себе си. Нека $X$ е разбиване на $S$. Разглеждаме произволен дял $A$ на $X$. По отношение на $A$ съществува един единствен дял $B$ на $X$, такъв че $A \subseteq B$, а именно, $B = A$. ✓

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е антисиметрична. Това е същото като да докажем, че ако за две разбивания $X$ и $Y$ на $S$ е вярно, че, ако $X$ рафинира $Y$ и $Y$ рафинира $X$, то $X = Y$. Нека $X$ и $Y$ са разбивания на $S$, такива че $X$ рафинира $Y$ и $Y$ рафинира $X$. Но тогава

$$\forall A \in X \;\; \exists B! \in Y : A \subseteq B \tag{8}$$
$$\forall C \in Y \;\; \exists D! \in X : C \subseteq D \tag{9}$$

  Разглеждаме произволен дял $A \in X$. По отношение на него, съгласно (8), има един единствен дял $B$ на $Y$, такъв че $A \subseteq B$. Но в (9), твърдението е за всеки $C \in Y$. В частност, ако $C$ съвпада с $B$, то (9) казва, че съществува един единствен елемент $D$ на $X$, такъв че $B \subseteq D$. Но този $D$ може да е само $A$, понеже $X$ е разбиване – щом $X$ е разбиване и $A$ е дял на $X$, елементите на $A$ не може да са елементи на други елементи на $X$.

  Щом $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тези два дяла на $X$ и $Y$ съвпадат; накратко, $A = B$. Забелязваме, че е невъзможно едното разбиване измежду $X$ и $Y$ да съдържа един дял, $A$ или $B$ съответно, а другото разбиване да има още дялове, понеже $A = B$. И така, ако $A$ и $B$ са единствените дялове съответно в $X$ и $Y$, доказателството е готово – очевидно $X = Y$ в този случай. В противен случай, изтриваме елемента $A$ от $X$ и $Y$ и продължаваме аналогично. Тъй като $X$ и $Y$ са крайни, след краен брой изтривания на общи елементи, $X$ и $Y$ ще станат едноелементни, като елементът им съвпада, така че в крайна сметка наистина $X = Y$.

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е транзитивна. Наистина, нека $X$, $Y$ и $Z$ са разбивания на $S$, такива че

$$\forall A \in X \;\; \exists B! \in Y : A \subseteq B \quad \wedge \quad \forall C \in Y \;\; \exists D! \in Z : C \subseteq D \tag{10}$$

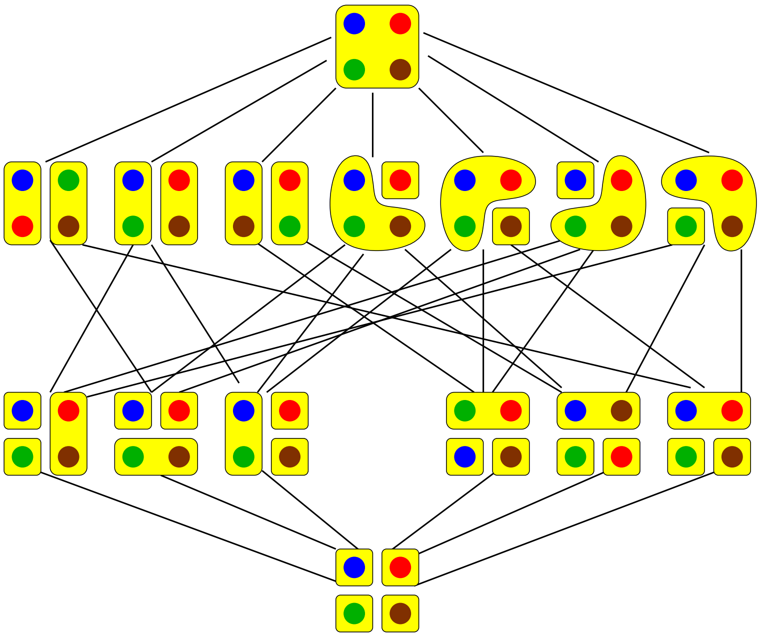
  Трябва да докажем, че

$$\forall A \in X \;\; \exists D! \in Y : A \subseteq D \tag{11}$$

  Да разгледаме произволен дял $A$ на $X$. Нека $B$ е уникалният дял на $Y$, съдържащ $A$ като подмножество съгласно (10). Но $B$ е един от дяловете на $Y$. Нека $D$ е уникалният дял на $Z$, съдържащ $A$ като подмножество съгласно (10). Но при това положение е очевидно, че $A$ се съдържа в $D$ като подмножество – щом всеки елемент на $A$ е елемент на $B$ и всеки елемент на $B$ е елемент на $D$, то всеки елемент на $A$ е елемент и на $D$. Но тогава (11) е в сила.

  Тук използвахме очевидната транзитивност на релацията "$x$ е елемент на $y$".

Доказахме, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба. Ето един начин да се нарисува нейната диаграма на Hasse в случай, че опорното множество има точно четири елемента. За яснота, имената не са написани върху рисунката, но можем да кажем, примерно, че синята точка е $a$, червената точка е $b$, зелената точка е $c$ и кафявата точка е $d$, а жълтите фигури означават дяловете на петнадесетте разбивания. Очевидно има точно един минимален елемент, а именно разбиването $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, и има точно един максимален елемент, а именно разбиването $\{\{a, b, c, d\}\}$.



**Задача 4:** Нека $S$ е крайно множество. Нека $|S| = n$. Нека $p(n)$ е броят на разбиванията на $S$. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$p(0) = 0$$
$$p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k) \text{ , за } n \geq 0$$

**Решение:** Първо разглеждаме $p(0)$. Има едно разбиване на празното множество, а именно празното разбиване (празното разбиване, формално, е празното множество), така че $p(0) = 1$, в празния смисъл (*vacuously* на английски).

Нека $|S| = n + 1$ за някое $n \geq 0$. Търсим формула за $p(n + 1)$. Фиксираме един елемент $x \in S$. Разглеждаме всички разбивания на $(n + 1)$-елементното множество $S$. Във всяко от тях, точно един дял съдържа $x$. Да наречем този дял $X$. Нека броят на елементите от $S$ в останалите дялове е $k$. Твърдим, че $0 \leq k \leq n$ и тези граници са точни:

- ако разбиването на $S$ е едноелементно, то то е $\{X\}$, така че други дялове няма и поради това броят $k$ на елементите в останалите дялове е 0;
- ако $|X| = 1$, тоест $X = \{x\}$, в останалите дялове има общо точно $n$ елементи от $S$.

За всяка възможна стойност на $k$, броят на разбиванията е произведението $\binom{n}{k}p(k)$ по следната причина. Представяме си множестото $Y_k$ от всички разбивания на $S$, такива че след изтриването на дяла $X$, в останалите дялове има точно $k$ елемента от $S$. По $\binom{n}{k}$ начина можем да изберем кои са тези $k$ елемента, понеже имаме $|S| = n + 1$, но ние фиксирахме един елемент $x$ от $S$ и той винаги се намира в дяла, който изтриваме, а $|S \setminus \{x\}| = n$. За всеки такъв избор, броят на разбиванията на множеството от тези $k$ елемента е $p(k)$ по дефиниция.

Тъй като множеството от всички разбивания на $S$ се разбива по броя $k$ на елементите, несъдържащи се в дяла, който съдържа $x$, по принципа на разбиването имаме

$$p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k).$$