Решения на малкото контролно на 5-та група

Задача 1: (20 т.) Нека p, q и r са произволни прости съждения. Докажете, че следните съставни съждения са еквивалентни:

1. $(p \to q) \land (r \lor (\neg p \lor q)) \land (\neg p \to \neg q)$
2. $(q \to p) \land (q \lor \neg p \lor (q \land p))$
3. $\neg q \longleftrightarrow \neg p$

Решение:

Първо ще покажем, че (1) и (3) са еквивалентни:

$$\begin{aligned}(p \to q) \land (r \lor (\neg p \lor q)) \land (\neg p \to \neg q) &\equiv (p \to q) \land (r \lor (p \to q)) \land (\neg p \to \neg q) && \text{// свойство на импликацията}\\ &\equiv (p \to q) \land (\neg p \to \neg q) && \text{// свойство на поглъщането}\\ &\equiv (\neg q \to \neg p) \land (\neg p \to \neg q) && \text{// контрапозиция}\\ &\equiv \neg p \longleftrightarrow \neg q && \text{// свойство на биимпликацията}\end{aligned}$$

Остава да покажем, че (2) и (3) са еквивалентни:

$$\begin{aligned}(q \to p) \land (q \lor \neg p \lor (q \land p)) &\equiv (q \to p) \land (\neg p \lor q \lor (q \land p)) && \text{// комутативност}\\ &\equiv (q \to p) \land (\neg p \lor (q \lor (q \land p))) && \text{// асоциативност}\\ &\equiv (q \to p) \land (\neg p \lor q) && \text{// свойство на поглъщането}\\ &\equiv (q \to p) \land (p \to q) && \text{// свойство на импликацията}\\ &\equiv (\neg p \to \neg q) \land (\neg q \to \neg p) && \text{// контрапозиция}\\ &\equiv \neg p \longleftrightarrow \neg q && \text{// свойство на биимпликацията}\end{aligned}$$

$\square$

Задача 2: Нека $R \subseteq \mathbb{N}^2$ е релация, такава че:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}\ [aRb \longleftrightarrow \exists k, i, j \in \mathbb{N}\ (a = k^{2^i} \land b = k^{2^j})]$$

а) (35 т.) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) (10 т.) Кои са класовете на еквивалентност на R? Какви са техните мощности? Не е нужно да се аргументирате формално.

Решение:

а) Първо ще покажем, че R е рефлексивна, тоест $\forall x \in \mathbb{N}\ xRx$. Да разгледаме вземем произволно x. Трябва да покажем, че x е в релация със себе си. Нека вземем $k = x$, $i = 0$ и $j = 0$. Вярно е, че $x = x^{2^0} = k^{2^i} \land x = x^{2^0} = k^{2^j}$, следователно от условието за принадлежност към R, x наистина ще е в релация със себе си.

Ще покажем, че R е симетрична, тоест $\forall x, y \in \mathbb{N}\ xRy \to yRx$. Нека вземем произволни x и y, такива, че $(x, y) \in R$. Трябва да покажем, че $(y, x) \in R$. От $(x, y) \in R$ и условието за принадлежност към R знаем, че съществуват k, i, j, такива, че $x = k^{2^i} \land y = k^{2^j}$. Е, тогава очевидно съществуват k', i', j', такива, че $y = k'^{2^{i'}} \land x = k'^{2^{j'}}$ (свидетели за това са $k' = k$, $i' = j$, $j' = i$). От условието за принадлежност към R последното влече $(y, x) \in R$.

Ще покажем, че R е транзитивна, тоест $\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ xRy \land yRz \to xRz$. Нека вземем произволни x, y и z, такива че $(x, y), (y, z) \in R$. Трябва да покажем, че $(x, z) \in R$. От $(x, y) \in R$ и условието за принадлежност към R знаем, че съществуват k_0, i_0, j_0 такива, че $x = k_0^{2^{i_0}} \land y = k_0^{2^{j_0}}$. Нека фиксираме произволни такива k_0, i_0 и j_0. От $(y, z) \in R$ и условието за принадлежност към R знаем, че съществуват k_1, i_1, j_1 такива, че $y = k_1^{2^{i_1}} \land z = k_1^{2^{j_1}}$. Нека фиксираме произволни такива k_1, i_1 и j_1. Тъй като $y = k_0^{2^{j_0}}$ и също така $y = k_1^{2^{i_1}}$, можем да заключим, че $k_0^{2^{j_0}} = k_1^{2^{i_1}}$, откъдето $k_0 = k_1^{\frac{2^{i_1}}{2^{j_0}}} = k_1^{2^{i_1 - j_0}}$. Нека без ограничение на общността вземем j_0 да е по-малко или равно на i_1. Заместваме новополученото изразяване на k_0 в тъждеството за x:

$$x = k_0^{2^{i_0}} = (k_1^{2^{i_1 - j_0}})^{2^{i_0}} = k_1^{2^{i_1 - j_0} 2^{i_0}} = k_1^{2^{i_1 - j_0 + i_0}}$$

Нека си вземем $i' = i_1 - j_0 + i_0$. (Забележете, че i' е естествено число, тъй като без ограничение на общността приехме, че $i_1 \geq j_0$). От условието за принадлежност към релацията, тък като x може да се представи като $k_1^{2^{i'}}$, а z може да се представи като $z = k_1^{2^{j_1}}$, то $(x, z) \in R$.

От това, че R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, следва, че R е релация на еквивалентност. $\square$

б) R има (изброимо) безкрайно много класове на еквивалентност:

$$
\begin{aligned}
&\{0\}\\
&\{1\}\\
&\{2, 4, 16, 256, ...\}\\
&\{3, 9, 81, 6561, ...\}\\
&\{5, 25, 625, ...\}\\
&\{6, 36, 1296, ...\}\\
&...
\end{aligned}
$$

С изключение на крайните класовете $\{0\}$ и $\{1\}$, всички останали класове са изброимо безкрайни.
По-формално можем да кажем, че класът на еквивалентност на произволно естествено число x е множеството $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge \exists i \in \mathbb{Z}\ y = x^{2^i}\}$.

Задача 3: (25 т.) Числата на Фибоначи са дефинирани по следния начин:

$$
\begin{aligned}
&F_0 = 0\\
&F_1 = 1\\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ за всяко } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Докажете, че за всяко естествено число n, F_{5n} се дели на 5.

Решение:

Ще докажем твърдението по индукция:
База: Твърдението е вярно за $k = 0$. Наистина, по дефиниция $F_0 = 0$, а 0 се дели на 5. ✓
Индукционно предположение: Твърдението е вярно за някакво естествено число $k = n$.
Индукционно предположение: Трябва да докажем, че твърдението е вярно за $k = n + 1$:

$$
\begin{aligned}
F_{5k} &= F_{5(n+1)}\\
&= F_{5n+5}\\
&= F_{5n+4} + F_{5n+3}\\
&= 2F_{5n+3} + F_{5n+2}\\
&= 3F_{5n+2} + 2F_{5n+1}\\
&= 5F_{5n+1} + 3F_{5n}\\
&= 5F_{5n+1} + 3.5x \text{ // от } \textbf{ИП} \text{ знаем, че } F_{5n} \text{ може да се представи като } 5x \text{ за някое цяло число } x.\\
&= 5\underbrace{(F_{5n+1} + 3x)}_{y \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

Получихме, че F_{5k} се дели на 5.

$\square$

Задача 4: (35 т.) Нека A е непразно множеството от положителни цели числа и $|A| = n$. Докажете, че:

$$\exists B \subseteq A\ \exists k \in \mathbb{N}^+ (\sum_{x \in B} x = kn)$$

Упътване: Разгледайте произволна верига от строги подмножества $\varnothing \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq ... \subsetneq A_n = A$.

Решение:

Забележка. Под "осатък при деление на n на някакво множество" се има предвид остатък при деление на n на сумата на елементите на това множество.

Трябва да докажем, че съществува непразно[1] подмножество на A, чиято сума на елементите се дели на n. Нека разгледаме произволна верига от n строги подмножества на A: $\varnothing \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq ... \subsetneq A_n = A$. Възможните остатъци на тези множества при деление на n са n на брой (от 0 до $n - 1$). Разглеждаме два случая:

[1] Няма как твърдението да е изпълнено за празно множество, $\sum_{x \in \varnothing} x = 0 \neq k.n$, понеже $k \neq 0$ и $n \neq 0$.

1 сл. Поне едно множество A_i има остатък 0 при деление на n. Тогава, това множество се дели на n и съответно твърдението от условието е вярно.

2 сл. Никой от остатъците на множествата не е 0. Тогава имаме n множества, всяко от които може да има $n-1$ възможни остатъка (от 1 до $n-1$). От принципа на Дирихле, съществуват две множества - A_i, A_j с еднакъв остатък r. По построение на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ знаем, че $A_i \subsetneq A_j \oplus A_j \subsetneq A_i$. Без ограничение на общността нека $A_i \subsetneq A_j$. Тогава непразното множество $(A_j \setminus A_i) \subseteq A$ ще има остатък $r - r = 0$ при деление на n или с други думи, ще се дели на n. $\square$