

Да се докаже, че:  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq (x+1)^2]$ .

**Задача 21.** Нека  $R$  е следната рекурсивна програма над типа  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, 1)  where
F(X, Y) = if X = 1 then Y else F(X - 1, Y * G(X, 2 * X))
G(X, Y) = if Y = 0 then 1 else
          if 2|Y then G(X * X, Y/2) else X * G(X, Y - 1).

```

Да се докаже, че:

$$(\forall x \geq 1)[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq \prod_{1 \leq j \leq x} j^2].$$

**Задача 22.** Нека  $R$  е следната рекурсивна програма над типа  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(2 * X, 1)  where
F(X, Y) = if X = 1 then Y else F(X - 1, Y * G(X, X))
G(X, Y) = if Y = 0 then 1 else
          if 2|Y then G(X * X, Y/2) else X * G(X, Y - 1).

```

Да се докаже, че:

$$(\forall x \geq 1)[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq \prod_{1 \leq j \leq 2x} j^2].$$

**Задача 23.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, X)  where
F(X, Y) = if Y = 0 then 1 else G(X, F(X, Y - 1))
G(X, Y) = if X = 0 then 0 else G(X - 1, Y) + Y

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq x^x]$ .

Преземаме, че  $0^0 = 1$

**Задача 24.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, X)  where
F(X, Y) = if Y = 0 then 0 else G(X, F(X, Y - 1))
G(X, Y) = if X = 0 then Y else G(X - 1, Y) + 1.

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq x^2]$ .

**Задача 25.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, X, 0)  where
F(X, Y, Z) = if Y = 0 then Z else F(X, Y - 1, G(X, Z))
G(X, Y) = if X = 0 then Y else G(X - 1, Y + 1).

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq x^2]$ .

**Задача 26.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, X, 1)  where
F(X, Y, Z) = if Y = 0 then Z else F(X, Y - 1, G(X, Z, 0))
G(X, Y, Z) = if X = 0 then Z else G(X - 1, Y, Z + Y).

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq x^x]$ .

## Глава 3

# Предаване на параметрите по стойност

**Задача 17.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, 1)  where
F(X, Y) = if X = 0 then Y else F(X - 1, G(X, Y))
G(X, Y) = if X = 0 then 0 else G(X - 1, Y) + 2Y.

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq (2x)!]$ , където

$$x!! = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot x, & \text{ако } x > 0 \text{ \& } x \text{ е четно} \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x, & \text{ако } x > 0 \text{ \& } x \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

**Задача 18.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(X, 1)  where
F(X, Y) = if X = 0 then Y else F(X - 1, G(X, Y))
G(X, Y) = if X = 0 then Y else G(X - 1, Y) + 2Y.

```

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq (2x)!]$ , където

$$x!! = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot x, & \text{ако } x > 0 \text{ \& } x \text{ е четно} \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x, & \text{ако } x > 0 \text{ \& } x \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

**Задача 19.**  $R$  е следната рекурсивна програма над типа  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(0, Y, Y)  where
F(X, Y, Z) = if X = Y then Z else F(X + 1, Y, G(0, X, Z))
G(X, Y, Z) = if X = Y then Z + 1 else G(X + 1, Y, 2 + Z)

```

Да се докаже, че:  $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq x^2 + x]$ .

**Задача 20.**  $R$  е следната рекурсивна програма над типа  $\mathbf{Nat}$ :

```

F(0, Y, Y + 1)  where
F(X, Y, Z) = if X > Y then Z else F(X + 1, Y, G(0, X, Z))
G(X, Y, Z) = if X = Y then Z else G(X + 1, Y, 2 + Z)

```

**Задача 27.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X) \text{ where} \\ &F(X) = \text{if } X \leq 1 \text{ then } 3^X \text{ else } G(2 * F(X - 1), 3 * F(X - 2)) \\ &G(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } X \text{ else } G(X, Y - 1) + 1. \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \simeq 3^{x^2}]$ .

**Задача 28.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X) \text{ where} \\ &F(X) = \text{if } X \leq 1 \text{ then } 4^X \text{ else } G(3 * F(X - 1), 4 * F(X - 2)) \\ &G(X, Y) = \text{if } X = 0 \text{ then } Y \text{ else } G(X - 1, Y) + 1. \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 4^{x^2}]$ .

**Задача 29.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  над целите числа:

$$\begin{aligned} &F(X, X) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } X = Y \text{ then } G(X, Y) \text{ else } F(X, Y + 1) - X \\ &G(X, Y) = \text{if } X = 0 \text{ then } 0 \text{ else } G(X - 1, Y) + Y. \end{aligned}$$

Докажете, че

- $(\forall x \in \mathbb{Z}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) = x^2]$ ;
- $(\forall x \in \mathbb{Z}) [x < 0 \Rightarrow \neg D_V(R)(x)]$ .

**Задача 30.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &G(X, 0, 1) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else } X * F(X - 1, Y - 1) / Y \\ &G(X, Y, Z) = \text{if } X = Y \text{ then } Z \text{ else } G(X, Y + 1, Z + F(X, Y)) \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 2^{x^2}]$ .

**Задача 31.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X) \text{ where} \\ &F(X) = \text{if } X = 0 \text{ then } 1 \text{ else } \alpha(X) * (F(G(X)))^2 \\ &G(X) = \text{if } X \leq 1 \text{ then } 0 \text{ else } G(X - 2) + 1, \end{aligned}$$

където  $\alpha(x) = \text{if } x \equiv 0 \pmod 2 \text{ then } 1 \text{ else } 2$ .

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 2^{x^2}]$ .

**Задача 32.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &G(X, X) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } Y = 0 \vee X = Y \text{ then } 1 \text{ else } F(X - 1, Y - 1) + F(X - 1, Y) \\ &G(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else } G(X, Y - 1) + F(X, Y) \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 2^{x^2}]$ .

**Задача 33.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &G(X, 0, 0) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else } 2 * X * F(X - 1, Y - 1) / Y \\ &G(X, Y, Z) = \text{if } X < Y \text{ then } Z \text{ else } G(X, Y + 1, Z + F(X, Y)) \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 3^{x^2}]$ .

**Задача 34.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &G(X, 0, 0) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else } X * F(X - 1, Y - 1) / Y \\ &G(X, Y, Z) = \text{if } X < Y \text{ then } Z \text{ else } G(X, Y + 1, Z + F(X, Y)) \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 2^{x^2}]$ .

**Задача 35.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X) \text{ where} \\ &F(X) = \text{if } X \leq 1 \text{ then } 4 \text{ else } G(F(X - 1)^2, F(X - 2)^4) \\ &G(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 0 \text{ else } G(X, Y - 1) + X. \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall a \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(a) \Rightarrow \log_2(D_V(R)(a)) \equiv 2 \pmod{10}]$ .

**Задача 36.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X, Y, 1) \text{ where} \\ &F(X, Y, Z) = \text{if } X = 1 \text{ then } Z \text{ else } F(X - 1, Y, Z * G(X, Y)) \\ &G(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else } X * G(X, Y - 1). \end{aligned}$$

Докажете, че  $(\forall x, y \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x, y) \Rightarrow D_V(R)(x, y) \simeq (x!)^y]$ .

**Задача 37.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &F(X, Y, 1) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } X = 0 \text{ then } Y \text{ else if } X \equiv 1 \pmod 2 \text{ then } G(F(X - 1, 2), Y) \\ &\quad \text{else } F(X/2, F(X/2, Y)) \end{aligned}$$

$G(X, Y) = \text{if } X = 0 \text{ then } Y \text{ else } G(X - 1, Y) + 1$ .

Докажете, че  $(\forall x \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(x) \Rightarrow D_V(R)(x) \simeq 2x]$ .

**Задача 38.** Дадена е следната рекурсивна програма  $R$  в типа данни  $Nat$ :

$$\begin{aligned} &G(X, Y, 1) \text{ where} \\ &F(X, Y) = \text{if } Y = 0 \text{ then } 1 \text{ else if } X \equiv 0 \pmod 2 \text{ then } F(X, Y/2)^2 \\ &\quad \text{else } F(X, Y - 1) * X \end{aligned}$$

$G(X, Y, Z) = \text{if } Y = 0 \text{ then } Z \text{ else } G(X, Y - 1, F(X, Z))$ .

Докажете, че  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) [!D_V(R)(a, b) \Rightarrow D_V(R)(a, b) \simeq a \uparrow\uparrow b]$ , където  $a \uparrow\uparrow 0 = 1$ ,  $a \uparrow\uparrow (n + 1) = a^{(a \uparrow\uparrow n)}$ .