Задача 1. Нека е даден следния оператор от тип $(1, 1)$:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & f \text{ е крайна функция} \\ 1, & \text{иначе .} \end{cases}$$

Проверете дали:

а) Γ е монотонен оператор;

б) Γ е компактен оператор.

Док.

а) Трябва да проверим дали:

$$(\forall f, g \in \mathcal{F}_1)[f \subseteq g \ \Rightarrow \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)].$$

Да изберем $f \subseteq g$ да бъдат такива функции, че f е крайна функция, но g не е крайна функция. Тогава $(\forall x \in \mathbb{N})[\Gamma(f)(x) \simeq 0 \ \& \ \Gamma(g)(x) \simeq 1]$. Очевидно е, че за така избраните f и g, $\Gamma(f) \not\subseteq \Gamma(g)$.

б) Знаем, че всеки компактен оператор е монотонен. Щом Γ не е монотонен, то със сигурност Γ не е компактен.

$\square$

Задача 2. Нека е даден следния оператор от тип $(1, 1)$:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & f \text{ е крайна функция} \\ 1, & \text{иначе .} \end{cases}$$

Проверете дали:

а) Γ е монотонен оператор;

б) Γ е компактен оператор.

Док.

а) Трябва да проверим дали:

$$(\forall f, g \in \mathcal{F}_1)[f \subseteq g \ \Rightarrow \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)].$$

Нека $f \subseteq g$ са произволни функции от $\mathcal{F}_1$. Ще разгледаме два случая.

- f е крайна функция. Тогава $\Gamma(f) = \emptyset^{(1)}$ и е очевидно, че
$$\Gamma(f) = \emptyset^{(1)} \subseteq \Gamma(g).$$

- f не е крайна функция. Щом $f \subseteq g$, то g също не е крайна функция. Тогава
$$(\forall x \in \mathbb{N})[\Gamma(f)(x) \simeq 1 \simeq \Gamma(g)(x)],$$
от което следва, че
$$\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g).$$

Разгледахме всички възможни случаи за f и във всеки от тях получихме, че $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$. Следователно, Γ е монотонен оператор.

б) Сега ще проверим дали е изпълнено, че:

$$(\forall f \in \mathcal{F}_1)(\forall x, y \in \mathbb{N})[\Gamma(f)(x) \simeq y \ \Rightarrow \ (\exists \Theta \subseteq f)[\Gamma(\Theta)(x) \simeq y]]. \qquad (1)$$

Тук с Θ означаваме крайна функция. Нека f е не е крайна функция.Тогава е ясно, че за всяко $x \in \mathbb{N}$, $\Gamma(f)(x) \simeq 1$. От друга страна, понеже Θ е крайна, $\neg!\Gamma(\Theta)(x)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

Така видяхме, че ако f не е крайна, то за произволно x, $\Gamma(f)(x) \simeq 1$, но не съществува крайна $\Theta \subseteq f$, за която $\Gamma(\Theta)(x) \simeq 1$. От това следва, че Формула (1) не е изпълнена. Следователно, Γ не е компактен оператор.

□

Задача 3. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ действа по правилото:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x + y \text{ е просто,} \\ f(x + y, y) + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако f_Γ е най-малката неподвижна точка на Γ, то:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x, y) \Rightarrow x + y.f_\Gamma(x, y) \text{ е просто}].$$

Док.

а) Лесно се съобразява, че операторът е монотонен.

За втората част, нека $\Gamma(f)(x, y) \simeq z$, за някои $f \in \mathcal{F}_2$ и $x, y, z \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че съществува крайна функция $\Theta \subseteq f$, за която $\Gamma(\Theta)(x, y) \simeq z$. За целта ще разгледаме два случая за x и y.

- $x+y$ е просто число. Тогава $\Gamma(f)(x, y) \simeq 1$. Да вземем крайната функция $\Theta = \emptyset^{(2)}$. Очевидно е, че $\Gamma(\Theta)(x, y) \simeq 1$.
- $x + y$ не е просто число. Тогава $\Gamma(f)(x, y) \simeq z \simeq f(x + y, y) + 1$. В този случай, избираме крайната функция $\Theta \subseteq f$ да бъде такава, че $G_\Theta = \{\langle (x + y, y), u\rangle\}$, където $f(x + y, y) \simeq u$. Тогава

$$\Gamma(\Theta)(x, y) \simeq \Theta(x + y, y) + 1 \simeq f(x + y, y) + 1 \simeq z.$$

И в двата случая за x и y доказахме съществуването на крайна $\Theta \subseteq f$, за която $\Gamma(\Theta)(x, y) \simeq z$. Заключаваме, че операторът Γ е компактен.

б) Да дефинираме свойството P като

$$P(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x, y \in \mathbb{N})[!f(x, y) \Rightarrow x + y.f(x, y) \text{ е просто}].$$

Ще използваме индукционното правило на Скот за да докажем, че $P(f_\Gamma)$. Свойството е непрекъснато, защото е от тип частична коректност. Очевидно е, че $P(\emptyset^{(2)})$.

Нека приемем, че за някоя $f \in \mathcal{F}_2$ е изпълнено $P(f)$. Ще докажем, че $P(\Gamma(f))$. Нека $!\Gamma(f)(x, y)$. Отново ще разгледаме два случая за x и y.

- $x + y$ е просто число. Тогава $\Gamma(f)(x, y) \simeq 1$ и е ясно, че
$$x + y.\Gamma(f)(x, y) \simeq x + y$$
е просто число.
- $x + y$ не е просто число. Тогава $\Gamma(f)(x, y) \simeq f(x + y, y) + 1$ и
$$x + y.\Gamma(f)(x, y) \simeq x + y.(f(x + y, y) + 1) \simeq (x + y) + y.f(x + y, y).$$
Понеже $!\Gamma(f)(x, y)$, то и $!f(x + y, y)$. От предположението, че $P(f)$ е изпълнено, следва, че
$$!f(x + y, y) \;\Rightarrow\; (x + y) + y.f(x + y, y) \text{ е просто число.}$$
Заключаваме, че
$$x + y.\Gamma(f)(x, y) \simeq (x + y) + y.f(x + y, y)$$
е просто число.

Разгледахме всички случаи за x и y и следователно, $P(\Gamma(f))$ е изпълнено. От индукционното правило на Скот получаваме, че $P(f_\Gamma)$.

$\square$

Задача 4. Дадена е следната рекурсивна програма R в типа данни Nat:

$$\begin{aligned}
&G(X, 0) && \texttt{where} \\
&F(X, Y) &&= \texttt{if } Y = 0 \texttt{ then } 3^x \texttt{ else if } X = Y \texttt{ then } 2^y \\
& && \quad\texttt{else } 2 * F(X - 1, Y - 1) + 3 * F(X - 1, Y) \\
&G(X, Y) &&= \texttt{if } Y > X \texttt{ then } 0 \texttt{ else } G(X, Y + 1) + F(X, Y)
\end{aligned}$$

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_V(R)(x) \;\Rightarrow\; D_V(R)(x) \simeq 5^x]$.

Док. Основното наблюдение, което ще използваме наготово в тази задача е, че
$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i} \binom{n}{i}.$$

Да разгледаме системата от непрекъснати изображения:

$$\Gamma_1(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} 3^x & \text{, ако } y = 0 \\ 2^y & \text{, ако } x = y \\ 2.f(x - 1, y - 1) + 3.f(x - 1, y) & \text{, иначе} \end{cases}$$
$$\Gamma_2(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, ако } y > x \\ g(x, y + 1) + f(x, y) & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Тогава $\Delta : \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$, дефинирано като:
$$\Delta(f, g) = (\Gamma_1(f, g), \Gamma_2(f, g)),$$
също е непрекъснато изображение. Ако означим с (φ_1, φ_2) най-малката неподвижна точка на Δ, то
$$D_V(R)(x) \simeq \varphi_2(x, 0).$$

Сега дефинираме следните свойства:

$$P_1(f,g) \;\Leftrightarrow\; (\forall x,y \in \mathbb{N})[!f(x,y) \;\Rightarrow\; f(x,y) \simeq 2^y 3^{x-y}\binom{x}{y}],$$
$$P_2(f,g) \;\Leftrightarrow\; (\forall x,y \in \mathbb{N})[!g(x,y) \;\Rightarrow\; g(x,y) \simeq \sum_{z=y}^{x} 2^z 3^{x-z}\binom{x}{z}].$$

Понеже те са от тип частична коректност, те са и непрекъснати. Ще докажем с индукционно правило на Скот, че $P(\varphi_1,\varphi_2)$, където

$$P(f,g) \;\Leftrightarrow\; P_1(f,g) \;\&\; P_2(f,g).$$

P също е непрекъснато свойство, защото е конюнкция на две непрекъснати свойства.

Очевидно е, че $P(\emptyset^{(2)},\emptyset^{(2)})$. Сега да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено. Ще докажем $P(\Delta(f,g))$.

1) Имаме, че:

$$P_1(\Delta(f,g)) \;\Leftrightarrow\; (\forall x,y \in \mathbb{N})[!\Gamma_1(f,g)(x,y) \;\&\; y \leq x \Rightarrow \Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2^y 3^{x-y}\binom{x}{y}].$$

Нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq u$ и $y \leq x$. Според дефиницията на Γ_1, трябва да разгледаме три случая:

- ако $y = 0$, $\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 3^x \simeq 2^0 3^{x-0}\binom{x}{0}$.
- ако $x = y$, $\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2^y \simeq 2^y 3^{x-y}\binom{x}{y}$.
- иначе, $0 < y < x$ и $!\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2.f(x-1,y-1) + 3.f(x-1,y) \simeq u$. Понеже е изпълнено $P_1(f,g)$, то имаме, че:

$$f(x-1,y-1) \simeq 2^{y-1}3^{x-1-(y-1)}\binom{x-1}{y-1}$$
$$f(x-1,y) \simeq 2^y 3^{x-1-y}\binom{x-1}{y}.$$

Тогава:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(f,g)(x,y) &\simeq 2.2^{y-1}3^{x-y}\binom{x-1}{y-1} + 3.2^y 3^{x-1-y}\binom{x-1}{y}\\ &\simeq 2^y 3^{x-y}\binom{x-1}{y-1} + 2^y 3^{x-y}\binom{x-1}{y}\\ &\simeq 2^y 3^x[\binom{x-1}{y-1} + \binom{x-1}{y}]\\ &\simeq 2^y 3^{x-y}\binom{x}{y}.\end{aligned}$$

2) Имаме, че:

$$P_2(\Delta(f,g)) \;\Leftrightarrow\; (\forall x,y \in \mathbb{N})[!\Gamma_2(f,g)(x,y) \;\Rightarrow\; \Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq \sum_{z=y}^{x} 2^z 3^{x-z}\binom{x}{z}].$$

Нека $!\Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq u$. Според дефиницията на Γ_2, трябва да разгледаме два случая:

- ако $y > x$, $\Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq 0 \simeq \sum_{z=y}^{x} 2^z 3^{x-z}\binom{x}{z}$, защото сумата от елементите на празното множество е 0.
- ако $y \leq x$, $\Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq g(x,y+1)+f(x,y)$. Понеже е изпълнено $P_1(f,g)$ и $P_2(f,g)$, то имаме, че:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(f,g)(x,y) &\simeq g(x,y+1)+f(x,y) && (\text{ от деф. на } \Gamma_2)\\
&\simeq g(x,y+1)+2^y3^{x-y}\binom{x}{y} && (\text{ от } P_1(f,g))\\
&\simeq \sum_{z=y+1}^{x} 2^z3^{x-z}\binom{x}{z} + 2^y3^{x-y}\binom{x}{y} && (\text{ от } P_2(f,g))\\
&\simeq \sum_{z=y}^{x} 2^z3^{x-z}\binom{x}{z}.
\end{aligned}$$

Накрая заключаваме, че $P(\Delta(f,g))$. Следователно, $P_2(\varphi_1,\varphi_2)$ и в частност,

$$D_V(R)(x) \simeq \varphi_2(x,0) \simeq \sum_{z=0}^{x} 2^z3^{x-z}\binom{x}{z} \simeq (2+3)^x \simeq 5^x.$$

□

Задача 5. R е следната рекурсивна програма над типа **Nat**:

$$\begin{aligned}
&F(X,X) \quad \text{where}\\
&F(X,Y) = \text{if } X \equiv 0 \pmod 3 \text{ then } X/3\\
&\qquad\qquad \text{else } F(X-1, F(2X-2,Y))
\end{aligned}$$

Да се намерят $D_V(R)$ и $D_N(R)$.

Док. Имаме оператора $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3\\ f(x-1, f(2x-2,y)), & \text{иначе.}\end{cases}$$

Ще търсим елементите на монотонно растящата редица

$$\varphi_0 \subseteq \varphi_1 \subseteq \varphi_2 \subseteq \dots,$$

където $\varphi_0 = \emptyset^{(2)}$ и $\varphi_{i+1} = \Gamma(\varphi_i)$. Да пресметнем първите няколко члена на тази редица.

$$\neg!\varphi_0(x,y), \text{ за всяко } x,y \in \mathbb{N}$$

$$\varphi_1(x,y) \simeq \Gamma(\varphi_0)(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3\\ \neg!, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\varphi_2(x,y) \simeq \Gamma(\varphi_1)(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3\\ \varphi_1(x-1,\varphi_1(2x-2,y)), & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3\\ \varphi_1(x-1,(2x-2)/3), & 2x-2 \equiv 0 \pmod 3\\ \neg!, & \text{в останалите случаи}\end{cases}$$

Съобразете, че

$$2x-2 \equiv 0 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; 2x \equiv 2 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; x \equiv 1 \pmod 3.$$

Така получаваме, че:

$$\varphi_2(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ (x-1)/3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg!, & x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x,y) \simeq \Gamma(\varphi_2)(x,y) &\simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \varphi_2(x-1, \varphi_2(2x-2,y)), & \text{иначе} \end{cases} \\ &\simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \varphi_2(x-1, \varphi_2(2x-2,y)), & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \varphi_2(x-1, \varphi_2(2x-2,y)), & x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Тук използвахме, че

$$x \equiv 2 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; 2x \equiv 4 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; 2x-2 \equiv 2 \pmod 3.$$

Тогава в случая $x \equiv 2 \pmod 3$ имаме $\neg!\varphi_2(2x-2,y)$ и

$$\varphi_3(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \varphi_2(x-1, (2x-2)/3), & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg!, & x \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ (x-1)/3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg!, & x \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Получаваме, че $\varphi_2 = \varphi_3$. Следователно $\varphi_2 = \bigcup_n \varphi_n$ и $D_V(R)(x) \simeq \varphi_2(x,x)$. Тогава за всяко $x \in \mathbb{N}$,

$$D_V(R)(x) \simeq \begin{cases} \lfloor x/3 \rfloor, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3 \text{ или } x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg!, & \text{ако } x \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Преминаваме към намирането на денотационната семантика по име на програмата R. Сега имаме изображението $\Delta : \mathcal{F}_2^{\perp} \to \mathcal{F}_2^{\perp}$, което дефинирано като:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x/3, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3 \\ f(x-1, f(2x-2,y)), & \text{ако } x \equiv 1 \pmod 3 \text{ или } x \equiv 2 \pmod 3 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Започваме да търсим елементите на монотонно растящата редица

$$\psi_0 \sqsubseteq \psi_1 \sqsubseteq \psi_2 \sqsubseteq \dots,$$

където $\psi_0 = \Omega^{(2)}$ и $\psi_{i+1} = \Delta(\psi_i)$. Да пресметнем първите няколко члена на тази редица.

$$\psi_0(x,y) = \bot \text{ за всяко } x, y \in \mathbb{N}_\bot$$

$$\psi_1(x,y) = \Delta(\psi_0)(x,y) = \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \bot, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(x,y) &= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_1(x-1, \psi_1(2x-2,y)), & x \in \mathbb{N} \text{ и } x \not\equiv 0 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_1(x-1, \psi_1(2x-2,y)), & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \text{ или } x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ (x-1)/3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \text{ или } x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\psi_3(x,y) = \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_2(x-1, \psi_2(2x-2,y)), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_2(x-1, \psi_2(2x-2,y)), & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \psi_2(x-1, \psi_2(2x-2,y)), & x \equiv 2 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_2(x-1, \psi_2(2x-2,y)), & x-1 \equiv 0 \pmod 3 \\ \psi_2(x-1, \psi_2(2x-2,y)), & x-1 \equiv 1 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ (x-1)/3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ ((x-1)-1)/3, & x \equiv 2 \pmod 3 \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lfloor x/3 \rfloor, & x \in \mathbb{N} \\ \bot, & x = \bot \end{cases}
\end{aligned}$$

Знаем, че $\psi_3 \sqsubseteq \psi_4$. Освен това, $\psi_4(\bot) = \Delta(\psi_3)(\bot) = \bot$ и следователно $\psi_3 = \psi_4$.

Тогава $\psi_3 = \bigsqcup_i \psi_i$ и за всяко $x \in \mathbb{N}$,

$$D_N(R)(x) \simeq \begin{cases} \psi_3(x,x), & \text{ако } \psi_3(x,x) \neq \bot \\ \neg !, & \text{ако } \psi_3(x,x) = \bot \end{cases}$$

Понеже $\psi_3(x) = \lfloor x/3 \rfloor$ за всяко $x \in \mathbb{N}$, то $D_N(R)(x) = \lfloor x/3 \rfloor$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. $\square$