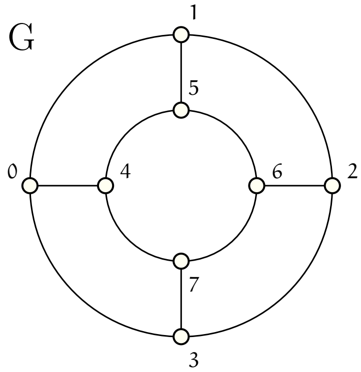
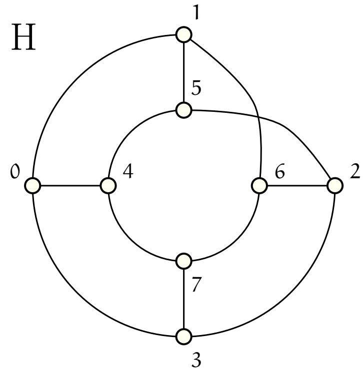
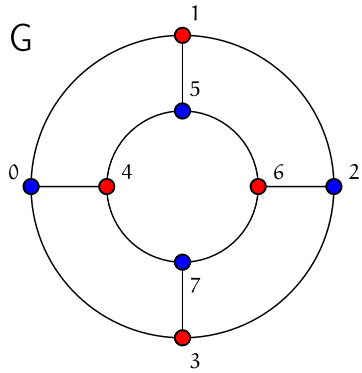
Примерни решения на задачите от изпита по Дискретни Структури, КН 2 поток, 08 февруари 2025 г.

Задача 1. Докажете или опровергайте, че графите G и H, нарисувани тук, са изоморфни.



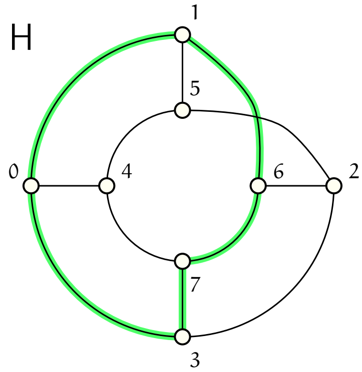


Решение. Тези два графа не са изоморфни. Лесно се вижда, че G е двуделен граф:



Единият дял е $\{1, 3, 4, 6\}$ (червените върхове), а другият е $\{0, 2, 5, 7\}$ (сините върхове).

От друга страна, H не е двуделен, понеже има нечетен цикъл, примерно $1, 0, 3, 7, 6, 1$. А от лекции знаем, че граф е двуделен тстк няма нечетни цикли:



□

Задача 2. Нека $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ е азбука и $n \in \mathbb{N}^+$. Със Σ^n означаваме множеството от стринговете (думите) с дължина n над азбуката Σ. Нека $\mathsf{T}(n)$ е множеството от всички появи на подстринга 00 в елементите на Σ^n.

2 т. • За $m = 1, 2, 3$, напишете $\mathsf{T}(m)$ в явен вид. Не е необходимо да пишете всички елементи на Σ^m. Достатъчно е да напишете само елементите на Σ^m, които съдържат подстринга 00, и да означите ясно различните появи на 00.

14 т. • Съставете рекурентно уравнение за $|\mathsf{T}(n)|$.

6 т. • Решете уравнението.

Решение. $\mathsf{T}(1) = \emptyset$: очевидно стринговете с дължина 1 не съдържат двубуквения 00 като подстринг. $\mathsf{T}(2) = 00$: единственият стринг с дължина 2, който съдържа 00 като подстринг, е самият 00, така че има точно една поява на 00. $\mathsf{T}(3)$ има осем елемента:

- 000 съдържа две появи на 00, а именно $\boxed{00}0$ и $0\boxed{00}$.
- Всеки от 001, 002, 003, 100, 200 и 300 съдържа точно една поява на 00.

Да помислим за рекурентно уравнение за $|\mathsf{T}(n)|$. Нека $n \geq 2$. Стринговете на Σ^n се разбиват по първата буква. Нека $x \in \Sigma^n$.

- Ако x е от вида $1y$ или $2y$ или $3y$, където $y \in \Sigma^{n-1}$, то броят на появите на 00 в x е равен на броя на появите на 00 в y. От това съображение по принципа на разбиването имаме събираемо $+3|\mathsf{T}(n-1)|$ в рекурентното уравнение.
- Нека x е от вида $0y$, където $y \in \Sigma^{n-1}$. Появите на 00 в x се разбиват на
  1. тези, които са изцяло в y, и
  2. тези, чиято първа нула е първата буква-нула на x.

  Броят на първия вид е $|\mathsf{T}(n-1)|$ по очевидни причини. Да помислим за появите от втория вид. Те се състоят от първата буква-нула на x и първата буква-нула на y. Ерго, в такъв случай x е от вида $00z$, където $z \in \Sigma^{n-2}$. Нашата цел е да преброим **само** възможностите за поява на 00 в началото на x, без да броим тези вътре в z. Поради това, възможностите за поява на 00 в началото на x са точно колкото са всички стрингове над Σ с дължина $n-2$, а те са 4^{n-2}.

  От тези съображения по принципа на разбиването имаме събираемо $+|\mathsf{T}(n-1)|+4^{n-2}$ в рекурентното уравнение.

В крайна сметка $|\mathsf{T}(n)| = 4|\mathsf{T}(n-1)|+4^{n-2}$. Заедно с началното условие $|\mathsf{T}(1)| = 0$, рекурентното уравнение е

$$|\mathsf{T}(n)| = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 1, \\ 4|\mathsf{T}(n-1)| + (\frac{1}{16}1^n) \cdot 4^n, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е $x - 4 = 0$ с корен 4. В нехомогенната част полиномът е от нулева степен, а основата на експонентата е 4, така че оттам "идва" една четворка. Мултимножеството от корените е $\{4, 4\}_M$, откъдето общото решение е

$$|\mathsf{T}(n)| = A4^n + Bn4^n$$

за някакви константи A и B.

Да намерим A и B. Знаем, че $|\mathsf{T}(1)| = 0$, така че $|\mathsf{T}(2)| = 4|\mathsf{T}(1)| + 4^{2-2} = 4 \cdot 0 + 4^0 = 1$. Тогава

$$0 = A \cdot 4^1 + B \cdot 1 \cdot 4^1$$
$$1 = A \cdot 4^2 + B \cdot 2 \cdot 4^2$$

Тогава

$$0 = 4A + 4B$$
$$1 = 16A + 32B$$

Тогава $A = -\frac{1}{16}$ и $B = \frac{1}{16}$. Тогава

$$|T(n)| = -\frac{1}{16}4^n + \frac{1}{16}n4^n = \frac{1}{16}(n4^n - 4^n) = \frac{(n-1)4^n}{16} = (n-1)4^{n-2}$$

Проверка с тази формула с $n = 1, 2, 3$ дава съответно $|T(1)| = 0$, $|T(2)| = 1$, $|T(3)| = 8$, което съвпада с това, което изчислихме в началото. $\square$

Задача 3. Нека X и Y са множества. Разглеждаме функции с домейн X и кодомейн Y. Ако h е такава функция и $S \subseteq X$, дефинираме

$$h(S) = \{z \in Y \,|\, (\exists c \in S : h(c) = z)\}$$

Докажете или опровергайте, че ако $f : X \to Y$ е биекция и $A, B \subseteq X$, то $f(A \triangle B) = f(A) \triangle f(B)$.

Решение. Твърдението е вярно. Първо ще докажем, че $f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B)$. Разглеждаме произволен $y \in f(A \triangle B)$. Ще докажем, че $y \in f(A) \triangle F(B)$.

Щом $y \in f(A \triangle B)$, съществува $x \in A \triangle B$, такъв че $f(x) = y$. По определение, $A \triangle B = \{a \,|\, a \in A \oplus a \in B\}$. Тогава x принадлежи на точно едно от A и B.

БОО, нека $x \in A$ и $x \notin B$. Щом $x \in A$, в сила е $f(x) \in f(A)$. Ще докажем, че $f(x) \notin f(B)$. Да допуснем, че $f(x) \in f(B)$. Тогава съществува $z \in B$, такова че $f(x) = f(z)$. Тъй като f е биекция, трябва да е изпълнено $x = z$. Но тогава $x \in B$, в противоречие с прежде направеното допускане, че $x \notin B$. Следователно, $f(x) \notin f(B)$. Щом $f(x) \in f(A)$ и $f(x) \notin f(B)$, в сила е $f(x) \in f(A) \triangle f(B)$. Но $f(x) = y$. Тогава $y \in f(A) \triangle f(B)$.

Сега ще докажем, че $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$. Разглеждаме произволен $y \in f(A) \triangle f(B)$. Ще докажем, че $y \in f(A \triangle B)$.

Щом $y \in f(A) \triangle f(B)$, y принадлежи на точно едно от $f(A)$ и $f(B)$.

БОО, нека $y \in f(A)$ и $y \notin f(B)$. Щом $y \in f(A)$, съществува $x \in A$, такъв че $f(x) = y$. Ще докажем, че $x \notin B$. Да допуснем, че $x \in B$. Но тогава $f(x) \in f(B)$, тоест, $y \in f(B)$, в противоречие с прежде направеното допускане, че $y \notin f(B)$. Следователно, $x \notin B$. Щом $x \in A$ и $x \notin B$, вярно е, че $x \in A \triangle B$. Но тогава $f(x) \in f(A \triangle B)$; тоест, $y \in f(A \triangle B)$. $\square$

Задача 4. Нека X и Y са множества. Докажете или опровергайте, че $X \setminus (X \setminus Y) = Y$.

Решение. Твърдението не е вярно. Ето контрапример. Нека $X = \{a, b\}$ и $Y = \{b, c\}$. Тогава

$$X \setminus (X \setminus Y) = \{a, b\} \setminus \big(\{a, b\} \setminus \{b, c\}\big) = \{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$$

Но $\{b\} \neq Y$. $\square$

Задача 5. Даден е обикновен граф G. С "$\delta(G)$" означаваме минималната степен на връх в графа. Известно е, че $\delta(G) \geq 2$. Докажете, че

- *10 т.* G съдържа път с дължина поне $\delta(G)$.
- *10 т.* G съдържа цикъл с дължина поне $\delta(G) + 1$.

Решение. Нека p е най-дълъг път в G. Щом $\delta(G) \geq 2$, $E(G) \neq \emptyset$. Щом G има ребра, $|p| \geq 1$. Щом $|p| \geq 1$, краищата на p са различни, тъй като p е прост. Нека u е един от двата края на p. Нека $N(u)$ е множеството от съседите на u. Тогава $|N(u)| = d(u)$, понеже графът е обикновен. От това следва, че $|N(u)| \geq \delta(G)$.

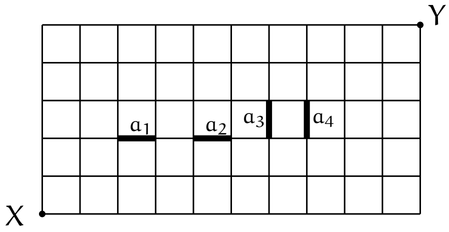
Първото ключово наблюдение е, че всички върхове от $N(u)$ са върхове в p. Ако допуснем, че поне един връх от $N(u)$ не се намира в p, ще конструираме път, по-дълъг от p, в противоречие с допускането, че p е най-дълъг път. И така, всички съседи на u се намират в p и са поне $\delta(G)$ на брой. Тогава p съдържа поне тези върхове: самият u и върховете от $N(u)$. Тогава p съдържа поне $\delta(G) + 1$ върхове. Тогава $|p| \geq \delta(G)$. Доказахме първото твърдение от условието.

Нека $N(u) = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Нека другият край на p (който не е u) е връх w. БОО, нека върховете от $N(u)$ се намират в p в следния ред:

$$w, \ldots, v_1, \ldots, v_2, \ldots\ldots\ldots v_k, \ldots, u$$

Иначе казано, ако "вървим" по пътя от w към u, първо срещаме v_1 като връх от $N(u)$, после срещаме v_2 като връх от $N(u)$, и така нататък, и последният връх от $N(u)$, който срещаме, е v_k. Не се твърди, че вътрешните върхове на p са точно върховете от $N(u)$, може да има и други – затова са многоточията в израза. Второто ключово наблюдение е, че има ребро (v_1, u), понеже $v_1 \in N(u)$. Тогава подпътят на p между v_1 и u, плюс реброто (v_1, u), е цикъл с дължина поне $k+1$. Но $k \geq \delta(G)$. Следва, че в G има цикъл с дължина поне $\delta(G) + 1$. Доказахме второто твърдение от условието. □

Задача 6. В тази задача става дума за разходки (придвижвания) в правоъгълна мрежа, каквито сме разглеждали на лекции. Дадена е тази правоъгълна мрежа:



Намерете броя на разходките, които започват в точка X, завършват в точка Y и **не** минават през нито една от отсечките a_1, a_2, a_3, a_4 (удебелени на фигурата). Дайте отговор-число.

Решение. Нека P е множеството от всички разходки от X до Y. Нека P_{a_i} е множеството от разходките, които **минават** през отсечката a_i, за $1 \leq i \leq 4$. Нека $\overline{P_{a_i}}$ е множеството от разходките, които **не минават** през отсечката a_i, за $1 \leq i \leq 4$. Търсим $|\overline{P_{a_1}} \cap \overline{P_{a_2}} \cap \overline{P_{a_3}} \cap \overline{P_{a_4}}|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|\overline{P_{a_1}} \cap \overline{P_{a_2}} \cap \overline{P_{a_3}} \cap \overline{P_{a_4}}| = |P| - \sum_{1 \leq i \leq 4} |P_{a_i}| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |P_{a_i} \cap P_{a_j}| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |P_{a_i} \cap P_{a_j} \cap P_{a_k}| + |P_{a_1} \cap P_{a_2} \cap P_{a_3} \cap P_{a_4}|$$

Цялата мрежа е 5×10. Съгласно това, което сме изучавали на лекции,

$$|P| = \binom{5+10}{5} = \binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 91 \cdot 3 \cdot 11 = 273 \cdot 11 = 3003$$

Броят на разходките, които минават през a_1, е

$$|P_{a_1}| = \binom{2+2}{2}\binom{7+3}{3} = \binom{4}{2}\binom{10}{3} = 6 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 40 \cdot 3 = 720$$

Броят на разходките, които минават през a_2, е

$$|P_{a_2}| = \binom{4+2}{2}\binom{5+3}{3} = \binom{6}{2}\binom{8}{3} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 56 = 840$$

Броят на разходките, които минават през a_3, е

$$|P_{a_3}| = \binom{6+2}{2}\binom{4+2}{2} = \binom{8}{2}\binom{6}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 28 \cdot 15 = 420$$

Броят на разходките, които минават през a_4, е

$$|P_{a_4}| = \binom{7+2}{2}\binom{3+2}{2} = \binom{9}{2}\binom{5}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 36 \cdot 10 = 360$$

Тогава $\sum_{1 \leq i \leq 4} |P_{a_i}| = 720 + 840 + 420 + 360 = 2340$.

Броят на разходките, които минават през a_1 и a_2, е

$$|P_{a_1} \cap P_{a_2}| = \binom{2+2}{2}\binom{5+3}{3} = 6 \cdot 56 = 336$$

Броят на разходките, които минават през a_1 и a_3, е

$$|P_{a_1} \cap P_{a_3}| = \binom{2+2}{2}\binom{4+2}{2} = 6 \cdot 15 = 90$$

Броят на разходките, които минават през a_1 и a_4, е

$$|P_{a_1} \cap P_{a_4}| = \binom{2+2}{2}\binom{3+2}{2} = 6 \cdot 10 = 60$$

Броят на разходките, които минават през a_2 и a_3, е

$$|P_{a_2} \cap P_{a_3}| = \binom{4+2}{2}\binom{4+2}{2} = 15 \cdot 15 = 225$$

Броят на разходките, които минават през a_2 и a_4, е

$$|P_{a_2} \cap P_{a_4}| = \binom{4+2}{2}\binom{3+2}{2} = 15 \cdot 10 = 150$$

Тъй като няма разходки, които минават през a_3 и a_4, $|P_{a_3} \cap P_{a_4}| = 0$. Тогава

$$\sum_{1 \le i < j \le 4} |P_{a_i} \cap P_{a_j}| = 336 + 90 + 60 + 225 + 150 + 0 = 861$$

Броят на разходките, които минават през a_1 и a_2 и a_3, е

$$|P_{a_1} \cap P_{a_2} \cap P_{a_3}| = \binom{2+2}{2}\binom{4+2}{2} = 6 \cdot 15 = 90$$

Броят на разходките, които минават през a_1 и a_2 и a_4, е

$$|P_{a_1} \cap P_{a_2} \cap P_{a_4}| = \binom{2+2}{2}\binom{3+2}{2} = 6 \cdot 10 = 60$$

Тъй като няма разходки, които минават през a_3 и a_4, $|P_{a_1} \cap P_{a_3} \cap P_{a_4}| = 0$ и $|P_{a_2} \cap P_{a_3} \cap P_{a_4}| = 0$. Тогава

$$\sum_{1 \le i < j < k \le 4} |P_{a_i} \cap P_{a_j} \cap P_{a_k}| = 90 + 60 + 0 + 0 = 150$$

И накрая, $|P_{a_1} \cap P_{a_2} \cap P_{a_3} \cap P_{a_4}| = 0$.

Отговорът е

$$|\overline{P_{a_1}} \cap \overline{P_{a_2}} \cap \overline{P_{a_3}} \cap \overline{P_{a_4}}| = 3003 - 2340 + 861 - 150 + 0 = 1374$$

$\square$

Задача 7. Намерете полинома на Жегалкин на следната булева функция на пет променливи:

$$f(x, y, z, u, v) = 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 0001$$

Допуснете, че даденото канонично описание на функцията е по отношение на тази наредба на променливите: (x, y, z, u, v).

Решение. Разглеждаме обратната функция:

$$\overline{f(x, y, z, u, v)} = 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1110$$

Тя има стойност 1 върху векторите 11100, 11101 и 11110 и стойност 0 върху всички останали вектори. Тогава СъвДНФ на обратната функция е

$$\phi = x\,y\,z\,\overline{u}\,\overline{v} \ \vee \ x\,y\,z\,\overline{u}\,v \ \vee \ x\,y\,z\,u\,\overline{v}$$

Съгласно изучаваното на лекции, от ϕ конструираме формулата

$$\psi = xyz(1+u)(1+v) + xyz(1+u)v + xyzu(1+v)$$

Отваряме скобите в ψ и елиминираме повтарящи се събираеми по двойки:

$$\begin{aligned} & xyz + xyzu + xyzv + xyzuv + xyzv + xyzuv + xyzu + xyzuv = \\ & xyz + xyzuv \end{aligned}$$

ПЖ на $\overline{f}$ е $xyz + xyzuv$. Тогава ПЖ на f е $1 + xyz + xyzuv$. $\square$