

1 Свързани компоненти на $GL_n(\mathbb{R})$

С $GL_n(\mathbb{R})$ ще означаваме всички реални обратими $n \times n$ матрици. С I_n ще означаваме единичната матрица от ред n (ако редът се подразбира, ще пропускате индекса).

Едно подмножество S на топологично пространство X наричаме линейно свързано, ако за всеки $x, y \in S$ съществува непрекъснатата функция $H : [0, 1] \rightarrow X$, такава че $H(0) = x$, $H(1) = y$ и $H(t) \in S$ за всяко $t \in [0, 1]$. Изображението H наричаме път между x и y .

Ще имаме нужда от следния факт от линейната алгебра.

Твърдение 1.1. *Нека $A \in GL_n(\mathbb{R})$ и α е сумата от алгебричните кратности на отрицателните реални характеристични корени на A . Тогава съществуват пространства U и V , такива че $U \oplus V = \mathbb{R}^n$ и също*

1. U и V са A -инвариантни;
2. $\dim U = \alpha$;
3. $A|_U$ има само реални характеристични корени и всички те са отрицателни.

Точки 2. и 3. в съвкупност показват, че $A|_U$ има за характеристични корени всички реални отрицателни корени на A , и че $A|_V$ има само реални положителни и комплексни корени.

Твърдението следва от Жордановата нормална форма на $A - U$ е линейната обвивка на собствените вектори и обобщените собствени вектори на отрицателните собствени стойности на A . Да припомним, че детерминантата на една матрица е произведението на характеристичните ѝ корени. Също така комплексните корени на една реална матрица са по двойки спрегнати. Затова, една реална матрица има положителна детерминанта, точно когато няма нулев корен и броят на отрицателните характеристични корени на матрицата, броени с алгебричните им кратности (числото α от Твърдение (1.1)), е четно число.

Теорема 1.2. *Нека $GL_n^+(\mathbb{R})$ е подмножеството на $GL_n(\mathbb{R})$ състоящо се от матриците с положителна детерминанта. Тогава $GL_n^+(\mathbb{R})$ е линейно свързано.*

Доказателство. Да фиксираме $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$. Нека α е както по-горе. От горните съображения, следва че $\alpha = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Ако $p = 0$, то A няма отрицателни реални корени. Следователно $H(t) := (1 - t)A + tI$ също няма отрицателни корени за $t \in [0, 1]$ (корените на тази матрица са от вида $(1 - t)\lambda + t$ за λ – корен на A). По същия начин, $H(t)$ няма нулев корен. Така $H(t) \in GL_n^+(\mathbb{R})$ за всяко $t \in [0, 1]$. Така построяваме път (отсечка) от A до I , който се съдържа в $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Сега да разгледаме по-интересния случай: $p \geq 1$. Прилагайки Твърдение (1.1) достигаем до съответните пространства U и V . Нека P_U и P_V са проекциите върху U и V съответно. Така $P_U + P_V = I$. Твърдим, че $H_1(t) := (1 - t)A + t(P_V - P_U)$ задава път между A и $P_V - P_U$ в $GL_n^+(\mathbb{R})$. Понеже $\det(H_1(t))$ е непрекъснат и $\det(H_1(0)) = \det A > 0$, достатъчно е да проверим, че $\det(H_1(t)) \neq 0$ за всяко $t \in (0, 1]$. Нека $w \in \mathbb{R}^n$ е такава че $H_1(t)w = 0$ за някое $t \in (0, 1)$. Тогава, използвайки, че $A = AP_U + AP_V$, имаме

$$\begin{aligned} (1 - t)Aw + t(P_V - P_U)w &= 0 \Leftrightarrow \\ (1 - t)AP_Vw + (1 - t)AP_Uw + t(P_V - P_U)w &= 0 \Leftrightarrow \\ ((1 - t)A + tI)P_Vw &= (-(1 - t)A + tI)P_Uw. \end{aligned}$$

Понеже $P_Vw \in V$, $P_Uw \in U$ и U, V са инвариантни спрямо A , то лявата страна на последно равенство представлява вектор от V , а дясната вектор от U . Понеже $U \cap V = \{0\}$, то двете страни трябва да са равни на 0. От лявата страна получаваме $A(P_Vw) = \frac{t}{t - 1}P_Vw$. Ако

$P_V w \neq 0$, то ще следва, че $A|_V$ има отрицателна собствена стойност, което ще е противоречие с избора на U и V . Значи $P_V w = 0$. Аналогично $P_U w = 0$ (иначе $A|_U$ ще има положителна собствена стойност). Понеже $U \oplus V = \mathbb{R}^n$, това означава, че $w = 0$ и значи $H_1(t)$ е обратима за $t \in (0, 1)$. При $t = 1$, $H_1(1)w = 0$ е еквивалентно на $P_U w = P_V w$ и както преди малко следва $w = 0$. Така $H_1(1)$ също е обратима.

Нека сега $B \in GL_{2p}(\mathbb{R})$ е матрица, която няма реални характеристични корени. Ще разглеждаме тази матрица като действаща върху U . Може да считаме, че B има вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

(оттук следва, че $B^2 = -I_{2p}$ и значи корените на B са $\pm i$). Твърдим, че

$$H_2(t) := (1-t)(P_V - P_U) + t(BP_U + P_V)$$

е път между $P_V - P_U$ и $BP_U + P_V$ в $GL_n^+(\mathbb{R})$. Разсъждаваме както по-горе. Нека $w \in \mathbb{R}^n$ е такава, че $H_2(t)w = 0$ за някое $t \in (0, 1]$. Тогава

$$\begin{aligned} (1-t)(P_V - P_U)w + t(BP_U + P_V)w &= 0 \Leftrightarrow \\ (tB - (1-t)I_{2p})P_U w &= P_V w. \end{aligned}$$

Както по-рано, двете страни трябва да бъдат нули (понеже лявата е в U , а дясната във V). В частност $B(P_U w) = \frac{1-t}{t}P_U w$. Ако $P_U w \neq 0$, то последното ще означава, че B има реална собствена стойност. Така $P_U w = P_V w$ и значи $w = 0$.

Съвсем аналогично се построява път между $BP_U + P_V$ и $P_U + P_V = I$ в $GL_n^+(\mathbb{R})$. Залепването на трите пътя $-H_1$, H_2 , H_3 задава път между A и I в $GL_n^+(\mathbb{R})$. Понеже A беше произволна, показахме, че от всяка матрица в A има път до I , което завършва доказателството. $\square$

Следствие 1.3. *Множеството $GL_n^-(\mathbb{R})$ състоящо се от матриците с отрицателна детерминанта е линейно свързано.*

Доказателство. Означаваме с N матрицата, която е диагонална, с елемент -1 на първо място, и 1 -ци след това. Така $N \in GL_n^-(\mathbb{R})$ и $N^2 = I$. Нека $A \in GL_n^-(\mathbb{R})$ е произволна. Съгласно правилото за умножение на детерминанти $NA \in GL_n^+(\mathbb{R})$. Нека H е път между NA и I , какъвто съществува съгласно Теорема (1.2). Тогава $\tilde{H}(t) := N \cdot H(t)$ е път между $N \cdot NA = A$ и $N \cdot I = N$ в $GL_n^-(\mathbb{R})$, което завършва доказателството. $\square$

Следствие 1.4. *Множеството $GL_n(\mathbb{R})$ има две свързани компоненти - матриците с положителна и с отрицателна детерминанта.*