

РЕЛАЦИИ

Казвайки “релация” без допълнителни уточнения, имаме предвид релация от вида $R \subseteq A \times A$. Когато казваме “крайна релация”, имаме предвид, че множеството е крайно. Казвайки “релация над A ”, имаме предвид, че A е въпросното множество. Казвайки “релация над декартовия квадрат $A \times A$ ” имаме предвид същото нещо, а именно, че $R \subseteq A \times A$; а **не** че $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$. Фактът, че $a \in A$ и $b \in A$ са в релация бележим с “ $(a, b) \in R$ ” или с по-краткия запис “ aRb ”.

Определение 1. Нека R е релация над A . Нека домейните за a , b и c са A .

- R е рефлексивна, ако $\forall a(aRa)$.
- R е антирефлексивна, ако $\forall a(\neg aRa)$.
- R е симетрична, ако $\forall a\forall b(aRb \rightarrow bRa)$.
- R е антисиметрична, ако $\forall a\forall b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$.
- R е силно антисиметрична, ако $\forall a\forall b(a \neq b \rightarrow ((aRb \wedge \neg bRa) \vee \neg(aRb \wedge bRa)))$.
- R е транзитивна, ако $\forall a\forall b\forall c(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$.

Когато се каже, изследвайте релацията R за шестте свойства, се разбира следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали R притежава това свойство, или не. □

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува графът ѝ.

Зад. 1 Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$. Опишете в явен вид релацията R и по трите начина, ако R е дефинирана така: за всеки a и b от A , aRb тогава и само тогава, когато

1. $a = b$
2. $a \neq b$
3. $a + b = 2$
4. $a * b = 2$
5. $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6. a дели b

7. a и b са взаимно прости[†]

Решение: Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

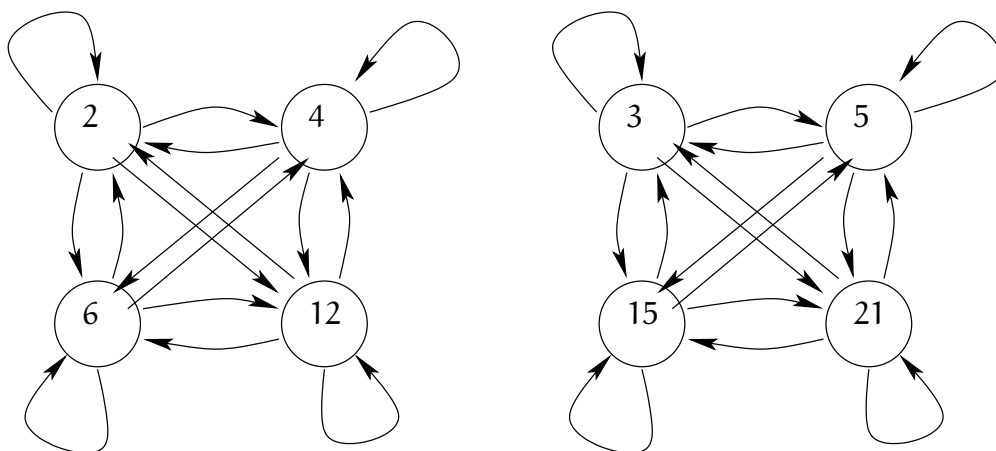
Първи начин

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 5), (3, 15), (3, 21), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 12), (5, 3), (5, 5), (5, 15), (5, 21), (6, 2), (6, 4), (6, 12), (12, 2), (12, 4), (12, 6), (12, 12), (15, 3), (15, 5), (15, 15), (15, 21), (21, 3), (21, 5), (21, 15), (21, 21)\}$$

Втори начин (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

Трети начин



[†] Две естествени числа m и n , такива че $m \geq 2$ и $n \geq 2$, са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

Зад. 2 За всяка от релациите от предната задача, изследвайте релацията за шестте свойства.

Решение: Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.
- Релацията е антирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.
- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число k , това число или е общ делител на две числа m и n , или не е. Дали казваме “на m и n ” или “на n и m ”, няма значение.

По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека $Q(m, n, k)$ е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, а на третата променлива е $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (тоест \mathbb{N}^+). Нека $Q(m, n, k)$ е истина тогава и само тогава, когато k е общ делител на m и n . Нека $P(m, n)$ е предикатът “ m и n са взаимно прости” с домейни $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Предикатът $P(m, n)$ можем да изразим така:

$$P(m, n) : \quad \forall k(Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

Тъй като $\forall m \forall n \forall k(Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$, то релацията е симетрична.

- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа x и y от дадените, такива че xRy и yRx , примерно 2 и 4.
- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).
- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

Определение 2. Нека $R \subseteq A \times B$ е двуместна релация. Обратната релация на R е релацията $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \in B \wedge b \in A \wedge (b, a) \in R\}$. Релацията-допълнение на R е релацията $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \notin R\}$. \square

Зад. 3 Напишете всички елементи на релацията $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, дефинирана така: $R = \{(a, b, c) \mid 0 < a < b < c < 5\}$.

Зад. 4 За всяка от следните дефиниции на релацията $R \subseteq A \times B$, намерете R^{-1} и \bar{R} . Символът “ \mathbb{R} ” означава множеството от реалните числа.

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \mid a < b\}$.
2. $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$.
3. A е множеството от държавите в Европа. B също е множеството от държавите в Европа. $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат обща граница}\}$.

Зад. 5 Нека M е матрицата на някаква релация $R \subseteq A \times A$. Нека A е крайно множество с n елемента. Нека M има точно k единици. Нека M' и M'' са съответно матриците на R^{-1} и \bar{R} . Колко единици има в M' ? Колко единици има в M'' ?

Зад. 6 Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Нека $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са такива, че $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ и $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. Намерете

- а) $R_1 \cup R_2$ б) $R_1 \cap R_2$ в) $R_1 \setminus R_2$ г) $R_2 \setminus R_1$ д) $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

Зад. 7 Нека A е множеството от студентите в някакъв университет. Нека B е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека $R \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са съответно релациите:

$R_1 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$

$R_2 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ е чел книга } b, \text{ която е трябвало да прочете}\}$

Опишете следните релации

- а) $R_1 \cup R_2$ б) $R_1 \cap R_2$ в) $R_1 \oplus R_2$ г) $R_1 \setminus R_2$ д) $R_2 \setminus R_1$

Зад. 8 Нека $R_{>} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$. Нека релациите $R_{\geq}, R_{<}, R_{\leq}, R_{=}, R_{\neq}$ са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:

- а) $R_{>} \cup R_{<}$ б) $R_{>} \cup R_{=}$ в) $R_{\geq} \cap R_{\leq}$ г) $R_{>} \setminus R_{\geq}$ д) $R_{\geq} \setminus R_{>}$
 е) $R_{<} \cup R_{=}$ ж) $R_{>} \oplus R_{<}$ з) $R_{>} \oplus R_{\leq}$ и) $R_{\geq} \cup R_{\leq}$ й) $R_{<} \cup R_{\neq}$
 к) $R_{<} \cap R_{\neq}$ л) $R_{\leq} \cap R_{\neq}$ м) $R_{\leq} \setminus R_{\neq}$ н) $R_{\neq} \setminus R_{\leq}$ о) $R_{\geq} \oplus R_{\neq}$ п) $R_{<} \oplus R_{=}$

Зад. 9 Напишете в явен вид (примерно, нарисувайки графа на релацията) всички релации над триелементно множество, които са антирефлексивни, антисиметрични и не са транзитивни.

Зад. 10(*) Колко релации $R \subseteq A \times A$, където A е крайно множество с n елемента, са:

1. рефлексивни?
2. антирефлексивни?
3. симетрични?
4. антисиметрични?
5. силно антисиметрични?
6. симетрични и антисиметрични?

7. симетрични и силно антисиметрични?
8. симетрични и рефлексивни?
9. антисиметрични и нито рефлексивни, нито антирефлексивни?
10. антисиметрични и силно антисиметрични?

Зад. 11 Колко транзитивни релации има над n елементно множество, ако

1. $n = 1$
2. $n = 2$
3. (*) $n = 3$

Зад. 12 Нека A и B са крайни множества. Нека A има точно три елемента. Колко елемента има B , ако е известно, че има точно 4096 релации от вида $R \subseteq A \times B$?

Упътване: $4096 = 2^{12}$.

Зад. 13 Следната теорема е невярна. Следователно, в “доказателството” ѝ има грешка/грешки. Открийте каква е грешката/какви са грешките в това “доказателство”.

Теорема 1 (погрешна теорема). *Нека R е произволна релация над множество A . Нека R е симетрична и транзитивна. Тогава R е рефлексивна.*

Доказателство

Разглеждаме произволен $a \in A$. Нека b е произволен елемент от A , такъв че aRb . Тъй като R е симетрична, заключаваме, че bRa . Тъй като R е транзитивна и вече имаме $aRb \wedge bRa$, заключаваме, че aRa . Доказахме за произволен елемент, че той е в релация със себе си. \square

Зад. 14 Докажете за произволна релация R , че R е симетрична тогава и само тогава, когато $R = R^{-1}$.

Зад. 15 Докажете за произволна релация $R \subseteq A \times A$, че R е антисиметрична тогава и само тогава, когато $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Зад. 16 Нека S е множеството от всички релации над I_5 . Нека $R \subseteq S \times S$ е релация, дефинирана така:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че R е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентност има R ?

Зад. 17 Нека за всяко естествено число n , J_n е множеството $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Нека $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$. Нека $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ е релация, дефинирана така:

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \vee ad = bc\}$$

Колко елемента има R ? Напишете в явен вид R чрез матрицата ѝ. Докажете, че R е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на R ?

Зад. 18 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Определете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на R .

Зад. 18 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ и $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$. Определете минималната по брой елементи релация $S \subseteq A \times A$, такава че $R \cup S$ е релация на еквивалентност.

Решение:

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}.$$

□

Зад. 19 Нека $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Нека $S \subseteq A \times A$ и $S = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4)\}$. Определете минималната по мощност релация $T \subseteq A \times A$, такава че $S \cup T$ е релация на еквивалентност.

Зад. 20 Нека R и S са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако R и S са транзитивни, то $R \Delta S$ е транзитивна.

Решение:

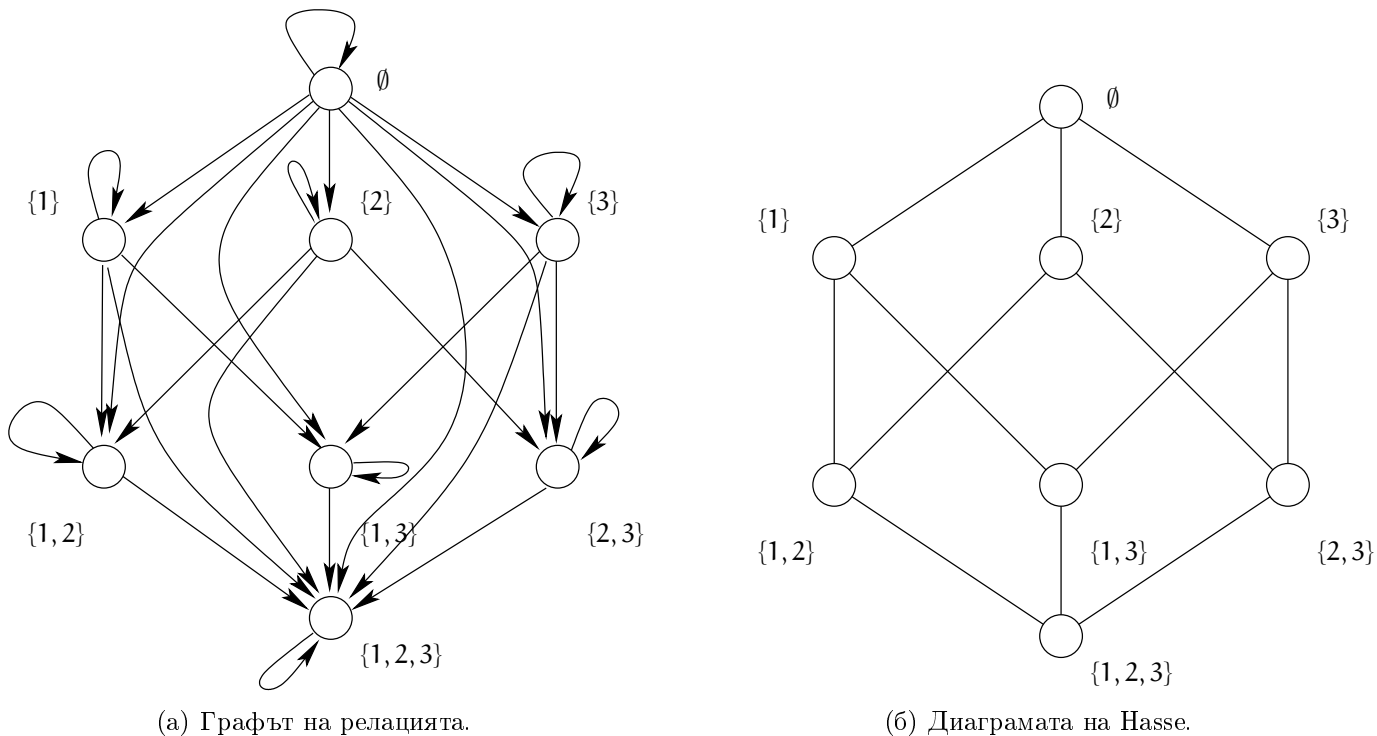
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ и $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. Очевидно и двете релации са транзитивни. Но $R \Delta S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$ не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа (a, d) . □

Зад. 21 Нека Q и T са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако T е антисиметрична, а Q е силно антисиметрична, то $\overline{T \setminus Q}$ е антисиметрична.

Решение:

Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $T = \{(a, b)\}$ и $Q = \{(a, b)\}$. Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно Q е силно антисиметрична. Но $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$, която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа (a, b) и (b, a) . □

Определение 3. Релация на частична наредба $R \subseteq A \times A$ е всяка релация, която е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко $a \in A$ и всяко $b \in A$, a и b са сравними, ако поне едно от aRb и bRa е изпълнено, и са несравними в противен случай. Диаграма на Хасе е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от графа на релацията:



Фигура 1: Графът и диаграмата на Хасе на релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$.

- не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подразбират;
- не се рисуват ребра от вида (a, c) , ако вече (a, b) и (b, c) присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подразбират;
- елементите се рисуват на ясно обособени нива, примерно минималните отгоре, техните непосредствени съседни на следващото ниво и т. н. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи отгоре и разполагаме другите надолу, посоките на ребрата са отгоре надолу.

□

Като пример вижте релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$, изобразена на Фигура 1 веднъж с граф и веднъж с диаграма на Хасе. Очевидно, диаграмата на Хасе е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

Зад. 22 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Определете в явен вид всички релации на частична наредба над A , в които a и b са минимални, а c и d не са сравними.

Решение:

Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).

Освен това, има нули в колоните на a и b (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като a и b са минимални (Фигура 3).

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: a и b са минимални.

Освен това, има нули в клетките (c, d) и (d, c), тъй като c и d не са сравними (Фигура 4).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

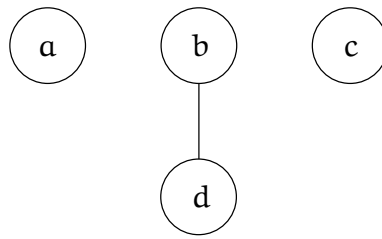
Фигура 4: c и d не са сравними.

Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по $2^4 = 16$ различни начина, всеки от които съответства на една от търсените релации:

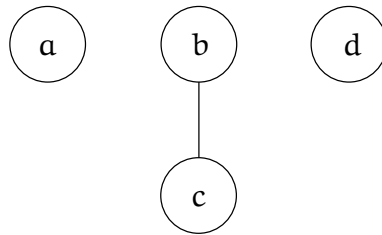
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



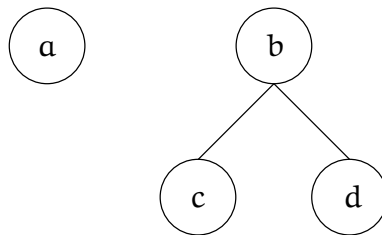
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



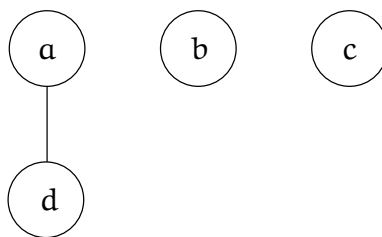
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



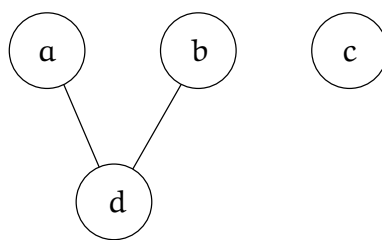
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



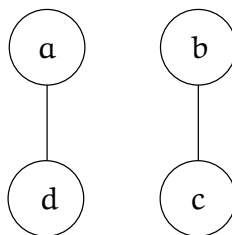
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



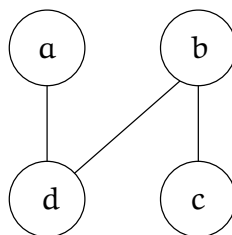
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



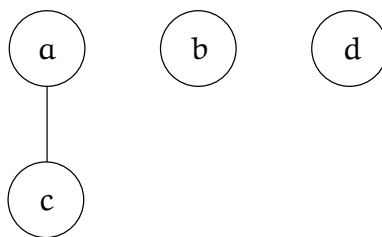
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



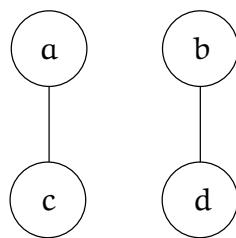
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



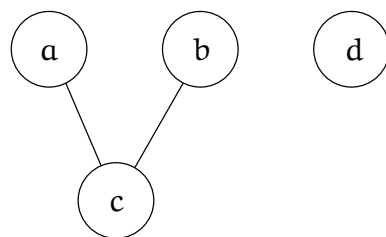
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



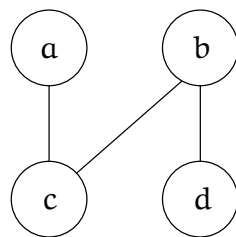
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



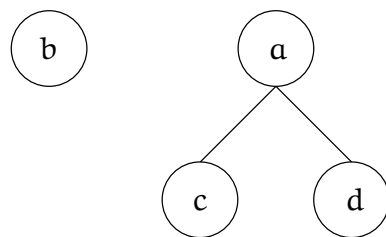
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



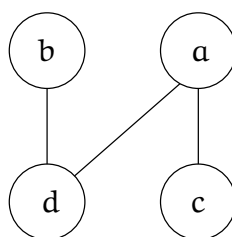
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



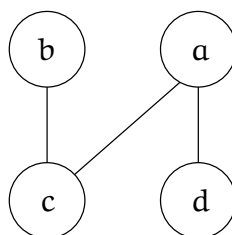
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



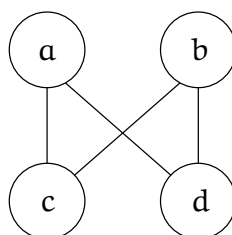
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



□

Определение 4, **Задача А**, **Задача Б** и **Задача В** са материал **извън** материала за курса и са предназначени за студенти със специален интерес към дискретната математика.

Определение 4 (композиция на релация със себе си). Нека R е релация над множество A . Релацията $R \circ R$ дефинираме така:

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c \in A (aRc \wedge cRb)\}$$

Степените на релацията R дефинираме така:

$$R^1 = R$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^{n+1} = R^n \circ R$$

Релациите $R^1 = R$, R^2 , R^3 и т. н. се наричат степените на R .

Зад. А Нека $R \subseteq I_4 \times I_4$ е дефинирана така: $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Намерете R^n за $n \in \mathbb{N}^+$.

Решение: Лесно се съобразява, че

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

Тъй като $R^4 = R^3$, очевидно че $R^5 = R^4$, $R^6 = R^5$, и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 4 \rightarrow R^n = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\})$$

□

Зад. Б Докажете, че за всяка релация $A \subseteq A \times A$, R е транзитивна тогава и само тогава, когато $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$.

Решение, част I: Нека R е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$. Базата е за $n = 1$: очевидно, $R^1 \subseteq R$. Да допуснем, че $R^n \subseteq R$. Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R$. Да разгледаме произволен елемент $(a, b) \in R^{n+1}$. Съгласно Определение 4, $\exists x \in A ((a, x) \in R^n \wedge (x, b) \in R)$. От индуктивната хипотеза знаем, че $R^n \subseteq R$. Следователно, $(a, x) \in R$. Щом $(a, x) \in R$ и $(x, b) \in R$, то $(a, b) \in R$, тъй като R е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в R^{n+1} , то той е и в R .

Решение, част II: Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$.

Ще докажем, че R е транзитивна. Тъй като $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$, в частност $R^2 \subseteq R$. Да разгледаме произволни елементи от A , да ги наречем a , b и c . Нека $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$. Съгласно Определение 4, изпълнено е $(a, c) \in R^2$. Но $R^2 \subseteq R$. Следователно, $(a, c) \in R$. □

Зад. В Докажете, че за всяка релация $A \subseteq A \times A$, ако R е рефлексивна и транзитивна, то $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n = R)$.