Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2014г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ. КОМБИНАТОРИКА

Задача 1: (12т.) Използвайки метода на математическата индукция, докажете, че $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n+2)} \geq \frac{1}{2n+2}$ за всяко естествено число n.

Задача 2: (12т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете, че за всяко естествено число n е в сила следното твърдение:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Задача 3: (15т.) Дадено е множеството $A = \{1, 3, 5, 12, 17, 18\}$ и релацията $R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : (a + b) = 0 \ mod \ 2\}$. Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се намерят класовете на еквивалентност.

Задача 4: (15т.) Нека $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Функцията $f : 2^A \to J_2^n$ е дефинирана, както следва: $f(x) = (c_1, ..., c_n)$, където за всяко $i = 1, .., n$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{ако } a_i \in x \\ \\ 0 & \text{ако } a_i \notin x \end{cases}$$

Докажете, че $f(x)$ е биекция.

Задача 5: (10т.) Функцията $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ е дефинирана по следния начин: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. Намерете обратната функция f^{-1}, ако такава съществува. Обосновете отговора си.

Задача 6: (20т.) Дадена е азбуката $\{a, b, c\}$. Намерете броя на думите над тази азбука, които имат дължина 15, най-много 5 букви a и след всяка буква a има буква b.

Задача 7: (12т.) Намерете коефициентите пред:

а) 4т.) a^7 в $(a+1)^{12}$
б) (4т.) $a^5 \cdot b^{10}$ в $(2a+3b)^{15}$
в) (4т.) $a^6 \cdot b^8$ в $(a+b^2)^{10}$

<u>Забележка:</u> **Максималният брой точки е 80.**