Функционално програмиране – Домашно 1

2025-11-08

1 Линейни диофантови уравнения с две неизвестни

Линейно диофантово уравнение с две неизвестни наричаме уравнение от вида

$$a.x + b.y = c,$$

където $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Дадено линейно диофантово уравнение има решение $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ тогава и само тогава, когато c се дели на най-големия общ делител $d := \mathrm{GCD}(a, b)$ на числата a и b. Известно е, че такова конкретно решение може да бъде намерено, използвайки т.нар. разширен алгоритъм на Евклид. Тогава решението $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ поражда пространство от решения, където всяко решение е от вида

$$(x_0 + k.u, y_0 - k.v)$$

за $k \in \mathbb{Z}$ и $u := \frac{b}{d}$ и $v := \frac{a}{d}$.

1.1 Конкретно решение

Да се дефинира функция, която намира едно конкретно решение на дадено линейно диофантово уравнение, ако такова съществува.

```
ghci> concreteSolution (LDE2 1 4 3)
Just (3,0)
```

Да се дефинира функция, която приема някакво решение (x, y) и проверява дали (x, y) е решение на дадено линейно диофантово уравнение.

```
ghci> checkSolution (3,0) (LDE2 1 4 3)
True
```

1.2 Пространство от решения

Да се дефинира функция, която генерира пространството от всички решения на дадено линейно диофантово уравнение, ако такова съществува. Допълнително ще искаме всяко цяло число $k \in \mathbb{Z}$ да генерира единствено решение, което да можем да индексираме в потока от решения.

```
ghci> take 10 $ diophantine (LDE2 1 4 3)
[(3,0),(7,-1),(-1,1),(11,-2),(-5,2),(15,-3),(-9,3),(19,-4),(-13,4),(23,-5)]
```

1.3 Форматиране

Да се дефинира функция, която приема някакво линейно диофантово уравнение и го форматира по следния начин:

$$a.x + b.y = c$$

```
ghci> prettyPrint (LDE2 1 4 3)
"1.x + 4.y = 3"
ghci> prettyPrint (LDE2 9 (-3) 6)
"9.x - 3.y = 6"
```

1.4 Десериализация

Да се дефинира функция, която десериализира някакъв низ, представящ линейно диофантово уравнение, до някакво вътрешно за програмата представяне. Ако низът не представя валидно линейно диофантово уравнение, да се съобщи за това.

```
ghci> toLDE2 "1.x + 4.y = 3"
Just (LDE2 1 4 3)
ghci> toLDE2 "4.x- 3.y =   8"
Just (LDE2 4 (-3) 8)
ghci> toLDE2 "4 - 3.y = 1"
Nothing
```

Бонус: Да се съобщи каква точно е грешката при невалиден низ.

2 Линейни диофантови уравнения с n на брой неизвестни

Линейно диофантово уравнение с n на брой неизвестни наричаме уравнение от следния вид:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = a,$$

където $a \in \mathbb{Z}$ и $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, ..., n\}$.

2.1 Представяне

Да се дефинира алгебричен тип данни, представящ линейно диофантово уравнение с n на брой неизвестни.

2.2 Генериране на ЛДУ с две променливи

Да се дефинира функция, която приема непразен краен списък от цели числа `ys` и линейно диофантово уравнение с n неизвестни и връща всички възможни линейни диофантови уравнения с две неизвестни, получени от ЛДУ с n неизвестни чрез фиксирането на някои две променливи x_i и x_j за $1 \leq i < j \leq n$ и последователното заместване на останалите променливи x_l за $l \neq i, l \neq j$ с някой елемент от списъка `ys`.

Бонус: Да не се използва пряка рекурсия, а само - функции от по-висок ред.

Пример:

Нека `ys = [1,2]` и имаме следното ЛДУ с 3 неизвестни:

$$x_1 + 4.x_2 + x_3 = 3.$$

Тогава при фиксирането на някои две променливи и последователното заместване на останалите променливи в ЛДУ с елементи от `ys`, получаваме следното:

- Фиксираме x_1 и x_2. Тогава заместваме x_3 с първия елемент от `ys`, а именно - 1, и получаваме уравнението $x_1 + 4.x_2 + 1 = 3$, което се преобразува до $x_1 + 4.x_2 = 2$. Тогава за вътрешното представяне на това уравнение получаваме `LDE2 1 4 2`. След това заместваме x_3 със следващия елемент в списъка и получаваме уравнението $x_1 + 4.x_2 + 2 = 3$, или $x_1 + 4.x_2 = 1$, което е точно `LDE2 1 4 1`;
- Фиксираме x_1 и x_3. Заместваме x_2 с първия елемент в списъка и получаваме уравнението $x_1 + 4.1 + x_3 = 3$, или $x_1 + x_3 = -1$, което съответства на `LDE2 1 1 (-1)`. Заместваме x_2 с втория елемент в списъка и получаваме $x_1 + 4.2 + x_3 = 3$, или $x_1 + x_3 = -5$, което е `LDE2 1 1 (-5)`;
- Фиксираме x_2 и x_3. Заместваме x_1 с първия елемент в списъка и получаваме уравнението $1 + 4.x_2 + x_3 = 3$, или $4.x_2 + x_3 = 2$, което е точно `LDE2 4 1 2`. Заместваме x_1 с втория елемент в списъка и получаваме $2 + 4.x_2 + x_3 = 3$, или $4.x_2 + x_3 = 1$, което е точно `LDE2 4 1 1`.