Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2014г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ. КОМБИНАТОРИКА РЕШЕНИЯ

Задача 1: (12т.) Използвайки метода на математическата индукция, докажете, че $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n+2)} \geq \frac{1}{2n+2}$ за всяко естествено число n.

Решение: Нека $P(n) : \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n+2)} \geq \frac{1}{2n+2}$.

1. Доказателство, че $P(0)$ е вярно: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ - вярно

2. Допускаме, че $P(k) : \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2k+2)} \geq \frac{1}{2k+2}$ е вярно за някакво естествено число $k \geq 0$.

3. Доказателство, че $P(k+1) : \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2k+4)} \geq \frac{1}{2k+4}$ е вярно:

   $$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2k+2) \cdot (2k+4)} \geq \frac{1}{2k+2} \cdot \frac{2k+3}{2k+4} =$$
   $$= \frac{1}{2k+4} \cdot (1 + \frac{1}{2k+2}) > \frac{1}{2k+4}$$

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число n.

Задача 2: (12т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете, че за всяко естествено число n е в сила следното твърдение:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Решение: Да означим с $P(n) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

1. Ще докажем $P(0)$: $0 \cdot 0! = (0+1) - 1$ вярно

2. Допускаме, че съществува естествено число k, такова че е вярно:

   $P(k) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k+1)! - 1$

3. Ще докажем, че е вярно

   $P(k+1) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$

   Наистина:

   $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! =$ съгласно т. 2

   $= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! =$

   $= (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1$

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число n.

Задача 3: (15т.) Дадено е множеството $A = \{1, 3, 5, 12, 17, 18\}$ и релацията $R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : (a + b) = 0 \ mod \ 2\}$. Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се намерят класовете на еквивалентност.

Решение:

1. $\forall a \in A : a + a = 2a = 0 \ mod \ 2$, следователно релацията R е рефлексивна.

2. $\forall a \forall b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$, тъй като $a + b = b + a$, следователно релацията R е симетрична.

3. Нека $a, b, c \in A$ са такива, че $a + b = 0 \ mod \ 2$ и $b + c = 0 \ mod \ 2 \Rightarrow$
$a + b = 2k, k \in \mathbb{Z}, b + c = 2r, r \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow$
$a + c = (a + b) + (b + c) - 2b = 2k + 2r - 2b = 2p, p \in \mathbb{Z}$

И така за произволни $a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \to (a, c) \in R$, следователно релацията е транзитивна.

Релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност. Тя разбива множеството A на два класа на еквивалентност, като във всеки един от тях попадат числата, които имат еднаква четност.

$$R_{[1]} = \{1, 3, 5, 17\}, \quad R_{[12]} = \{12, 18\}$$

Задача 4: (15т.) Нека $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Функцията $f : 2^A \to J_2^n$ е дефинирана, както следва: $f(x) = (c_1, ..., c_n)$, където за всяко $i \in I_n$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{ако } a_i \in x \\ \\ 0 & \text{ако } a_i \notin x \end{cases}$$

Докажете, че $f(x)$ е биекция.

Решение: Функцията $f(x)$ е биекция, ако е инекция и сюрекция.

а) Ще докажем, че $f(x)$ е инекция, т.е. $\forall x_1 \neq x_2 \in 2^A, f(x_1) \neq f(x_2)$.
Нека $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = (c_1, ..., c_n)$, $f(x_2) = (d_1, ..., d_n)$.
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists p \in I_n, a_p \in x_1 \oplus a_p \in x_2 \Rightarrow$

$\exists p \in I_n, c_p \neq d_p \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Следователно, $f(x)$ е инекция.

б) Ще докажем, че $f(x)$ е сюрекция, т.е. $\forall y \in J_2^n\ \exists x \in 2^A, f(x) = y$.

Нека $y = (c_1, ..., c_n)$. Тогава множеството $x = \{a_i \in A | i \in I_n \wedge c_i = 1\}$ е такова, че $f(x) = y$.

Следователно, $f(x)$ е сюрекция.

Следователно, $f(x)$ е биекция.

Задача 5: (10т.) Функцията $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ е дефинирана по следния начин: $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$. Намерете обратната функция f^{-1} ако такава съществува. Обосновете отгвора си.

Решение:

Ще проверим дали функцията е инекция. Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\dfrac{x_1}{1 + x_1^2} = \dfrac{x_2}{1 + x_2^2} \quad \Rightarrow$

$x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 - x_1^2 x_2 = 0 \quad \Rightarrow$

$(x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0$

Горното равенство е изпълнено в следните случаи:

$x_1 = x_2$ или $x_1 = \dfrac{1}{x_2} \quad \Rightarrow$

$\exists x_1 \exists x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$

например $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{3} : f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{3}{10}$

Функцията $f(x)$ не е инекция, следователно обратната функция $f^{-1}(x)$ не съществува.

Задача 6: (20т.) Дадена е азбуката $\{a, b, c\}$. Намерете броя на думите над тази азбука, които имат дължина 15, най-много 5 букви a и след всяка буква a има буква b.

Решение:

Множеството на всички думи, чийто брой искаме да намерим, може да представим като обединение на непресичащи се множества:

$X = \bigcup_{i=0}^{5} X_i$

където X_i е множеството от думите, които имат точно i букви a.

Ще намерим мощността на множеството X_i. За да осигурим изискването от условието на задачата всяка от буквите a ще обединим с една буква b и ще наречем тази двойка буква A. Сега думите от множеството X_i съдържат i букви A, а останалите $15 - 2i$ букви могат да бъдат b или c. За да намерим техния брой ще отговорим на два въпроса:

1. По колко начина можем да разположим i букви A в позициите на думата, които са $15 - i$ на брой. Това може да стане по $\binom{15-i}{i}$ начина;

2. По колко начина можем да запълним останалите позиции с букви b или c. Това става по 2^{15-2i} начина.

Като приложим принципа на умножението получаваме

$|X_i| = \binom{15-i}{i} \cdot 2^{15-2i}$

Сега прилагайки принципа на събирането можем да определим търсения брой:

$|X| = \bigcup_{i=0}^{5} |X_i| = \sum_{i=0}^{5} \binom{15-i}{i} 2^{15-2i}$

Задача 7: (12т.) Намерете коефициентите пред:

а) (4т.) a^7 в $(a+1)^{12}$

<u>Решение:</u> $(a+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot a^k \cdot 1^{12-k}$. Следователно, коефициентът е $\binom{12}{7} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!}$.

б) (4т.) $a^5 \cdot b^{10}$ в $(2a + 3b)^{15}$

<u>Решение:</u> $(2a + 3b)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \cdot (2a)^k \cdot (3b)^{15-k}$. Следователно, коефициентът е $\binom{15}{5} \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = \dfrac{15!}{5! \cdot 10!} \cdot 2^5 \cdot 3^{10}$.

в) (4т.) $a^6 \cdot b^8$ в $(a + b^2)^{10}$

<u>Решение:</u> $(a + b^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot a^k \cdot (b^2)^{10-k}$. Следователно, коефициентът е $\binom{10}{6} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$