Основни понятия в линейното оптимиране

Получената задача принадлежи на класа *линейни оптимизационни задачи* или, казано по друг начин, е *задача на линейното оптимиране*, тъй като променливите участват линейно (полиноми от първа степен) както в целевата функция, така и в левите страни на ограниченията.

Всеки (двумерен) вектор, чиито координати удовлетворяват ограниченията на задачата, се нарича *допустима точка* (или *допустим вектор*, *допустимо решение*, *план*) на задачата. Пример за допустима точка е $(3, 1)$, т. е. $x_1 = 3$ t и $x_2 = 1$ t. Тогава стойността на целевата функция е $z = 19$ хил. лв.

Множеството от всички допустими точки се нарича *допустимо множество* (а също така *множество от условия*, *множество от ограничения*, *множество от планове*).

Онзи елемент (онези елементи) на допустимото множество, за който (които) целевата функция достига оптималната си стойност, се нарича(т) *оптимално*(*и*) *решение*(*я*) на задачата.

Броят на променливите и броят на ограниченията се наричат *размери* на задачата. В случая имаме двумерна линейна оптимизационна задача с четири ограничения (обикновено ограниченията за неотрицателност на променливите не се броят, но задължително участват във формулировката на модела).

Нека векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$ са определени по следния начин: $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (всички вектори считаме, че са вектор-стълбове), т. е. координатите на $\mathbf{c}$ са доходите от 1 t боя от съответния вид, а координатите на $\mathbf{x}$ са променливите на задачата. Тогава целевата функция е скаларното произведение на векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$, което записваме в матричен вид по следния начин

$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = [5, 4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1 + 4x_2.$$

Ако с $\mathbf{A}$ означим матрицата $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ е векторът от десните страни на ограниченията, тогава ограниченията на задачата могат да бъдат записани като

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

(Релацията $\mathbf{u} \gtreqless \mathbf{v}$, където $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, означава $u_i \gtreqless v_i$ за всяко $i = 1, \ldots, n$.)