1. Увод

Задачата на линейното оптимиране (ЛО) може да се разглежда като модел за разпределение на ограничени ресурси, в който целевата функция, представляваща печалбата от някаква производствена дейност, трябва да бъде максимизирана. Ако разглеждаме задачата на ЛО от тази гледна точка, съответната ѝ двойствена задача получава интересна икономическа интерпретация.

За да формализираме разглеждания въпрос, в табл. 1 са показани общият вид на задачата за максимална печалба при ограничени ресурси и двойствената ѝ задача, като правата задача ще играе ролята на модел за разпределение на ресурси.

Таблица 1. Общ вид на задачата за максимална печалба при ограничени ресурси и двойствената ѝ задача

Права задача	Двойствена задача
$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i$
при ограничения	при ограничения
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m,$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \pi_i \geq c_j,\ j = 1, \ldots, n,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$	$\pi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Изхождайки от модела за разпределение на ресурси, правата задача отразява n вида икономическа (производствена) дейност и възможност за разпределение на m ресурса. В правата задача коефициентът c_j представлява печалбата от единица продукция от j-тия вид производствена дейност, като за производството на единица продукция от този вид се изразходват a_{ij} единици от i-тия ресурс, чиито максималните запаси са ограничени от количеството b_i.

2. Икономическа интерпретация на променливите на двойствената задача

Според слабата теорема за двойственост за произволни допустими решения на правата и двойствената задачи стойностите на целевите им функции удовлетворяват неравенството

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i = w,$$

като равенство се достига само тогава, когато тези допустими решения са оптимални за съответните задачи.

Най-напред да разгледаме случая, когато имаме оптимални решения, т. е. когато $w = z$. Изхождайки от представянето на правата задача като модел за разпределение на ресурси, можем да смятаме, че z представлява количеството на дохода (в лв). Тъй като b_i е общото налично количество на i-тия ресурс, равенството $z = w$ може да се запише по следния начин

$$\text{Доход (лв)} = \sum_{i} (\text{количество на ресурса } i) \times (\text{доход (лв) на единица от ресурса } i).$$

Това означава, че променливата π_i на двойствената задача трябва да представлява *цената на единица* от i-тия ресурс. В литературата по изследване на операциите променливите π_i на двойствената задача често се наричат *двойствени цени*. Освен това като синоними се използват още *цени в сянка* и *симплексни множители*.

Аналогично за произволна двойка допустими решения на правата и двойствената задачи неравенството $z < w$ може да се интерпретира като

$$\text{доход} < \text{обща цена на ресурсите}.$$

Тази зависимост показва, че докато сумарният доход от всички видове производство е строго по-малък от сумарната цена на всички използвани ресурси, решението както на правата, така и на двойствената задача не може да бъде оптимално. Оптимумът (максималният доход) може да бъде достигнат само тогава, когато всички ресурси са използвани изцяло. Ако линейният модел се разглежда по-общо като модел на някаква система, която има „вход“ и „изход“, то използваните ресурси характеризират входа на тази система, а полученият доход — нейния изход. Системата ще бъде в *нестабилно* (неоптимално) състояние, докато входът е по-голям от изхода. Устойчиво състояние на системата се характеризира с равенство на входа и изхода.

Пример. Да припомним математическата формулировката на правата и двойствената задача за вече разгледания пример на модел за максимална печалба при ограничени ресурси (т. нар. задача за фабриката за бои). Икономическата формулировка може да бъде намерена тук .

Права задача		Двойствена задача
$\max z = 5x_1 + 4x_2$		$\min w = 24\pi_1 + 6\pi_2 + \pi_3 + 2\pi_4$
при ограничения		при ограничения
$6x_1 + 4x_2 \le 24$	(ресурс 1, суровина C1),	$6\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 \ge 5$,
$x_1 + 2x_2 \le 6$	(ресурс 2, суровина C2),	$4\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \ge 4$,
$-x_1 + x_2 \le 1$	(ресурс 3),	$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \ge 0$.
$x_2 \le 2$	(ресурс 4),	
$x_1, x_2 \ge 0$.		
Оптимално решение:		Оптимално решение:
$x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$, $z = 21$.		$\pi_1 = 0{,}75$, $\pi_2 = 0{,}5$, $\pi_3 = \pi_4 = 0$,
		$w = 21$.

Решаването на правата задача със симплекс метода е лесно, тъй като задачи от този вид се свеждат до съответната канонична задача чрез добавяне на неотрицателни допълнителни променливи s_i във всяко от ограниченията, като тези допълнителни променливи образуват началния базис. След получаване на оптимално решение на правата задача относителните оценки на допълнителните променливи, взети с обратен знак, дават оптимално решение на двойствената задача.

Оптималното решение на двойствената задача показва, че цената на единица от първия ресурс (суровината C1) е $\pi_1 = 0{,}75$ (или 750 лв за тон), а на единица от втория (суровината C2) — $\pi_2 = 0{,}5$ (или 500 лв за тон). Следователно всяка промяна в количеството на суровината C1, която запазва базиса на намереното оптимално решение, би довела до промяна на стойността на целевата функция със 750 лв/тон. Например увеличаване на количеството на суровината C1 с 2 тона би довело до увеличаване на печалбата с 1500 лв, а намаляване на количеството на суровината C1 с 1 тон би намалило печалбата със 750 лв. Горното става съвсем очевидно, като разгледаме целевата функция w на двойствената задача като функция на b_i. Тогава частната производна на w по b_i е тъкмо π_i, т. е. двойствените цени определят изменението на целевите функции на двете задачи (които са равни при съответни оптимални решения!) при промяна на количеството b_i на i-тия ресурс с единица.

Двойствената цена на даден ресурс ни дава също *максималното увеличение*, което бихме си позволили да добавим към цената на единица от този ресурс, така че допълнителното му закупуване (при запазване на базиса) да ни носи печалба от произведената с него продукция.

3. Икономическа интерпретация на ограниченията на двойствената задача

На всяка итерация на симплекс метода относителните оценки се пресмятат по следния начин

$$\overline{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i$$

(относителната оценка на дадена променлива е равна на разликата между дясната и лявата страна на съответното ограничение в двойствената задача).

Критерият за оптималност в задачата за максимум ($\overline{c}_j \leq 0$) се състои в това, че j-тият вид производство (променливата x_j), който не е представен в базиса на текущото решение (т. е. съответната му променлива е небазисна и следователно е нула), може да влезе в базиса, за да се увеличи дохода, само тогава, когато относителна оценка $\overline{c}_j$ на тази променлива е положителна. Да дадем икономическа интерпретация на това условие. j-тият вид производство трябва да бъде представен в оптималното решение само ако е изпълнено неравенството

$$\begin{pmatrix} \textit{Цената на всички ресурси,} \\ \textit{използвани при производството} \\ \textit{на единица продукт от } j\textit{-ия вид} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \textit{Печалбата от} \\ \textit{реализацията на} \\ \textit{единица продукт} \\ \textit{от } j\textit{-ия вид} \end{pmatrix}.$$

Така критерият за оптималност (в задачата за максимум) води до факта, че производството на кой да е продукт трябва да нараства (от небазисна нула до възможно най-голяма положителна стойност) дотогава, докато доходът от него е по-голям от направените разходи.

Сега вече е ясно защо някой вид производство може и да не участва в полученото оптимално решение. Това се обуславя от факта, че цената на ресурсите, които се използват при производството на единица от съответния продукт, превишава печалбата от реализацията ѝ.

Двойствените цени могат да се използват и в процеса на изследване как да се направи j-тото производство по-доходно. За целта трябва да намалим съответната му цена на ресурсите, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i$. При това главно внимание се отделя на интензивността на потребление на ресурса a_{kj}, който съответства на най-голямата по стойност двойствена променлива π_k.