1. Увод

В разгледаните и решени досега линейни оптимизационни модели данните на задачите — векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ и матрицата $\mathbf{A}$ — бяха постоянни (непроменящи се). В практиката обаче всеки модел е „моментална“ снимка на реална ситуация. Впоследствие може да се наложи изменение на някои негови данни. Основната задача на *следоптималния анализ* (известен още като *анализ на чувствителността*) в линейното оптимиране е проследяване на изменението на оптималното решение на дадена линейна оптимизационна задача, ако след намирането му се налагат промени в данните.

За илюстриране на методите на следоптималния анализ ще използваме вече известния ни модел на *задачата за максимална печалба при ограничени ресурси*. Частен случай на такава задача беше първият пример, разгледан в този курс. Пълната ѝ формулировка може да бъде намерена тук.

2. Теоретични бележки

За конкретна итерация на симплекс метода всички данни в симплексната таблица (СТ) се получават от изходните данни $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ и обратната матрица на текущия базис $\mathbf{B}^{-1}$, а именно

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j,\ \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j,\ z = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{x_B} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Като положим $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}$, виждаме, че $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}_j$, т. е. относителната оценка на променливата x_j на всяка итерация на СМ е равна на разликата между дясната и лявата страна на съответното ограничение на двойствената задача.

От горните формули се вижда, че промени във вектора на целевата функция оказват влияние само върху вектора с относителните оценки $\bar{\mathbf{c}}$ и някои негови координати могат да се окажат неоптимални. От друга страна промени във вектора с десните страни на ограниченията водят само до промени в $\mathbf{x_B}$, които могат да доведат до това някои негови координати да станат отрицателни, т. е. недопустими.

3. Основни задачи на следоптималния анализ

След намиране на оптимално решение на една линейна задача е възможно да си зададем редица въпроси от вида „Какво би се случило с оптималното решение, ако

- бъде променена дясната страна b_i на едно ограничение?"
- бъде променен един коефициент c_j в целевата функция?"
- бъде променен един елемент a_{ij} на матрицата $\mathbf{A}$?"
- бъдат променени няколко целеви коефициенти?"
- бъдат променени няколко десни страни на ограниченията?"
- бъде добавено ново ограничение?"
- бъде добавено ново производство (т. е. нова променлива)?"
- бъдат добавени нови ограничения и нови променливи?"

На някои от тези въпроси може да бъде отговорено без да се решава задачата отново с променените данни. Затова е необходимо да се знае кои са те и как да се получи отговорът им, използвайки компютър. В повечето случаи принципите за получаване на отговорите са базирани на елементарни пресмятания с вектори и матрици. В практиката типична ситуация е задачата да бъде решена отново, ако се иска отговор на по-сложни въпроси, но вие трябва да знаете достатъчно, за да решите какво да предприемете във всеки конкретен случай.

Ето кои са въпросите, на които в повечето случаи може да се отговори без да се решава задачата отново:

- промяна на дясната страна b_i на едно ограничение;
- промяна на един коефициент c_j в целевата функция;
- промяна на десните страни b_i на няколко ограничения;
- промяна на няколко коефициента c_j в целевата функция.

4. Интервали на устойчивост

Интервалите на устойчивост ни позволяват да определим в какви граници може да се изменя един елемент от данните на задачата (един коефициент в целевата функция, дясната страна на едно ограничение или един елемент на матрицата **A**), така че да се *запази* намереният оптимален базис. `MS Excel` може да даде справка за интервалите на устойчивост (как става това е обяснено тук (стр. 7–8), а резултатът е показан на фиг. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report**							
2	**Worksheet: [prodmix.xls]Лист1**							
3	**Report Created: 29.10.2008 г. 16:51:13**							
4								
5								
6	Adjustable Cells							
7				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8		Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9		B13	Решение Боя за външно боядисване	3	0	5	1	3
10		C13	Решение Боя за вътрешно боядисване	1.5	0	4	6	0.666666667
11								
12	Constraints							
13				Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
14		Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
15		D6	Суровина C1	24	0.75	24	12	4
16		D7	Суровина C2	6	0.5	6	0.666666667	2
17		D8	Огр. от търсене 1	-1.5	0	1	1E+30	2.5
18		D9	Огр. от търсене 2	1.5	0	2	1E+30	0.5

Фигура 1. Справка с анализ на чувствителността (Sensitivity Report)

Най-напред в секцията *Променливи* (*Adjustable Cells*) за всяка променлива са дадени:

- адреса на клетката (`Cell`), съдържаща стойността на променливата;
- името на клетката (`Name`), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;
- крайната стойност x_j (`Final Value`) на променливата, която е оптималната, в случай че задачата има крайно решение;
- относителната оценка (`Reduced Cost`) на тази променлива;
- коефициентът ѝ c_j в целевата функция (`Objective Coefficient`);
- допустимото увеличение δ_j^+ (`Allowable Increase`) на стойността на c_j, при което оптималният базис се запазва;

- допустимото намаление δ_j^- (`Allowable Decrease`) на стойността на c_j, при което оптималният базис се запазва.

Интервалът на устойчивост за коефициента c_j е $[c_j - \delta_j^-, c_j + \delta_j^+]$. В този интервал на изменение на c_j намереният оптимален базис се запазва. Оптималното решение е същото, а стойността на целевата функция се променя пропорционално на изменението на коефициента c_j.

По подобен начин в секцията *Ограничения* (*Constraints*) за всяко ограничение са дадени:

- адреса на клетката (`Cell`), съдържаща пресметнатата лява страна на ограничението;

- името на клетката (`Name`), което се получава чрез последователно изписване на името на реда (най-вляво) и името на стълба (най-отгоре), в които се намира тази клетка;

- крайната стойност (`Final Value`) на лявата страна на ограничението;

- двойствената цена (`Shadow Price`) на ограничението;

- дясната страна b_i (`Constraint R.H. Side`) на ограничението;

- допустимото увеличение δ_i^+ (`Allowable Increase`) на дясната страна b_i, при което намереният оптимален базис остава допустим;

- допустимото намаление δ_i^- (`Allowable Decrease`) на дясната страна b_i, при което намереният оптимален базис остава допустим.

Интервалът на устойчивост за тази дясна страна е $[b_i - \delta_i^-, b_i + \delta_i^+]$. В този интервал на изменение на b_i намереният оптимален базис остава допустим, а промяната в целевата функция е пропорционална на направената промяна в b_i и на двойствената променлива, съответна на това ограничение.

Според показаното на фиг. 1 интервалът на устойчивост за коефициента пред x_1 е $[2, 6]$, а за този пред x_2 е $\left[3\frac{1}{3}, 10\right]$. За десните страни на ограниченията съответните интервали са $[20, 36]$, $\left[4, 6\frac{2}{3}\right]$, $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (числото `1E+30` се тълкува като $+\infty$).

Понякога е възможно да се предвиди ефекта от едновременно направени промени в няколко стойности, като се приложи т. нар. *правило на стоте процента*.

- Това правило не важи, ако се променят едновременно коефициенти в целевата функция и десни страни на ограничения.

- Ако се променят само коефициенти в целевата функция, вижте какъв е интервалът на устойчивост за тези коефициенти.
- Разгледайте процентите на направените промени, като разделите абсолютната стойност на разликата между новата и старата стойност на δ_j^+ или δ_j^- в зависимост от това дали увеличавате или намалявате съответния коефициент.
- Съберете всички проценти. Ако получената сума не е повече от 100%, тогава намереният оптимален базис се запазва.
- Ако сумата на процентите надхвърля 100%, не е ясно дали намереният оптимален базис остава такъв.
- По същия начин се процедира и с едновременни промени в десните страни на няколко ограничения.

5. Два лесни случая

Дефиниция. Едно ограничение ще наричаме *активно* (*пасивно*), ако в оптималното решение то се изпълнява като равенство (строго неравенство). *Дефицитен* се нарича този ресурс, на който отговаря *активно* ограничение. В противен случай той се нарича *недефицитен*.

1. Промяна в дясната страна b_i на пасивно ограничение. В този случай допълнителната променлива s_i, която свежда ограничението до равенство, е базисна в оптималното решение с положителна стойност. Затова базисът, оптималното решение (освен стойността на s_i) и стойността на целевата функция се запазват, докато ограничението не стане *активно* (тогава $s_i = 0$ и е небазисна).

2. Промяна в коефициент на небазисна променлива x_j. Като вземем пред, че относителната оценка на тази променлива

$$\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0$$

удовлетворява критерия за оптималност при минимум, ако новата стойност на коефициента пред x_j в целевата функция е $c_j^\delta = c_j + \delta$, то от

$$\overline{c}_j^\delta = c_j + \delta - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j = \overline{c}_j + \delta \geq 0$$

следва $-\overline{c}_j \leq \delta < +\infty$. Следователно оптималното решение се запазва, ако δ расте неограничено и не е по-малко от $-\overline{c}_j$.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Пивоварна произвежда светло пиво и бира, като за производството използва зърно, хмел и малц. Налични са 40 lb зърно, 30 lb хмел и 40 lb малц. Един барел светло пиво се продава за \$40 и за производството му са необходими 1 lb зърно, 1 lb хмел и 2 lb малц. Един барел бира се продава за \$50 и за производството му са необходими 2 lb зърно, 1 lb хмел и 1 lb малц. Пивоварната може да продаде цялото произведено количество светло пиво и бира. За да максимизира общата печалба, пивоварната трябва да реши следната линейна оптимизационна задача:

$$
\begin{aligned}
\max z = 40x_{\text{пиво}} + 50x_{\text{бира}},\\
x_{\text{пиво}} + 2x_{\text{бира}} &\le 40,\\
x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\le 30,\\
2x_{\text{пиво}} + x_{\text{бира}} &\le 40,\\
x_{\text{пиво}} \ge 0,\ x_{\text{бира}} &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Листът на `Excel` с данните на задачата и оптималното ѝ решение, както и справката с анализа на чувствителността, са показани на фиг. 2.

Забележка. Числата в реда `Хмел` на справката с анализа на чувствителността не са дадени нарочно, тъй като в едно от подусловията на задачата се иска те да бъдат попълнени.

За всяко от следващите подусловия отговорете на въпросите колкото е възможно по-пълно и подробно без да решавате задачата с `Excel Solver`, като използвате адресите на необходимите клетки.

Забележка. Всяко подусловие е независимо от останалите (всяка промяна на модела, направена в едно подусловие, не се отнася за никое от другите подусловия).

а) Кое е оптималното решение и колко е печалбата?

б) Да предположим, че печалбата от един барел светло пиво е станала \$60. Ще се промени ли оптималното решение и какво става с печалбата?

в) Нека печалбата от един барел бира е станала \$85. Ще се промени ли оптималното решение?

г) Да предположим, че фирмата е установила, че 10 lb от малца са мухлясали и трябва да бъдат изхвърлени. Ще се промени ли оптималното решение и какво се случва с печалбата?

	A	B	C	D	E
1	**Модел на пивоварна**				
2	**Входни данни**				
3		**Светло пиво**	**Бира**	**Всичко**	**Десни страни на ограниченията**
4	**Целева функция**	**40**	**50**	1200	
5	**Зърно**	**1**	**2**	40	**40**
6	**Хмел**	**1**	**1**	26.6667	**30**
7	**Малц**	**2**	**1**	40	**40**
8					
9	**Изходни резултати**				
10		Светло пиво	Бира	z	
11	Решение	13.33333333	13.33333333	1200	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Adjustable Cells							
2				**Final**	**Reduced**	**Objective**	**Allowable**	**Allowable**
3		**Cell**	**Name**	**Value**	**Cost**	**Coefficient**	**Increase**	**Decrease**
4		B11	Решение Светло пиво	13.333	0	40	60	15
5		C11	Решение Бира	13.333	0	50	30	30
6								
7	Constraints							
8				**Final**	**Shadow**	**Constraint**	**Allowable**	**Allowable**
9		**Cell**	**Name**	**Value**	**Price**	**R.H. Side**	**Increase**	**Decrease**
10		D5	Зърно Всичко	40	20	40	10	20
11		D6	Хмел Всичко					
12		D7	Малц Всичко	40	10	40	10	20

Фигура 2. Лист с данните и решението и справка с анализ на чувствителността

д) Да предположим, че фирмата може да купи допълнително 10 lb зърно, като заплати за тях допълнително $200. Ще го направи ли? Обяснете.

е) Попълнете липсващите числа в справката с анализа на чувствителността в реда `Хмел`, като използвате само листа с данните на задачата и полученото в него оптимално решение. Обяснете по какъв начин е възможно да бъде получено всяко от тези числа.

ж) Нека количеството на зърното се е увеличило с 5 lb, а това на малца е намаляло с 10 lb. Ще се промени ли оптималният базис?

2. Даден е следният математически модел на задача за максимална печалба при ограничени ресурси (времето на три машини в часове), с чиято помощ фабрика произвежда три вида продукт:

$$\max z = 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 \text{ (лева)},$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 + x_3 &\le 150 && \text{(наличното време на машина A)},\\
5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 100 && \text{(наличното време на машина B)},\\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 160 && \text{(наличното време на машина C)},\\
x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

`Sensitivity Report` за полученото оптимално решение с използването на `Excel Solver` е показан на фиг. 3. Разглеждайки всяко едно от следните твърдения независимо от останалите, определете дали то е вярно или невярно. Обяснете подробно всеки отговор.

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B12	Продукт 1	3,125	0	7	1,333333333	1,714285714
C12	Продукт 2	28,125	0	5	6,666666667	0,8
D12	Продукт 3	0	-0,75	2	0,75	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
E6	Машина A	150	0,25	150	16,66666667	90
E7	Машина B	100	1,25	100	150	10
E8	Машина C	59,375	0	160	1E+30	100,625

Фигура 3. Sensitivity Report

а) Ако новата цената на единица продукт 3 е 2,50 лв, той би участвал в новото оптимално решение.

б) Времето за работа на машина C може да стане 65 ч. без това да се отрази на печалбата.

в) Ако машина A има производствен капацитет от 170 ч., количеството на произведената продукция остава непроменено.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. а) Светло пиво и бира по $13\frac{1}{3}$ барела. Печалба \$1200. Клетки `B11`, `C11`, `D11`.

б) Оптималното решение се запазва, защото 60 е в интервала на устойчивост $[25, 100]$. Печалбата се увеличава с $20 \cdot 13\frac{1}{3} = \$266\frac{2}{3}$ до $\$1466\frac{2}{3}$.

в) Оптималното решение се променя, защото 85 не е в интервала на устойчивост $[20, 80]$.

г) Загубата на 10 lb малц е по-малко от допустимото намаляване 20. Оптималното решение се променя винаги, когато има промени в десните страни на ограниченията, но оптималният базис се запазва. Тогава може да се използва двойствената цена на малца (клетка `E12`). Стойността на целевата функция намалява с $10 \cdot 10 = \$100$ до \$1100.

д) Не. Печалбата е $10 \cdot 20 - 200 = \$0$.

е) Числата в реда `Хмел` се попълват по следния начин:

- `Final Value = 26,667` от клетка `D6`;
- `Shadow Price = 0`, защото ограничението е пасивно;
- `RHS = 30` от клетка `E6`;
- `Allowable Increase = 1E+30`, защото ограничението е пасивно;
- `Allowable Decrease = 3,333` (разликата на `E6` и `D6`).

ж) По правилото на 100% направените промени са $\frac{5}{10} + \frac{10}{20} = 100\%$. Оптималният базис остава допустим при направените промени.