Математически модел

Да определим променливата x_j като датата (измерена в дни от началната дата) за започване на поръчката j. Задачата има два типа ограничения:

1. ограничения, които гарантират, че никои две поръчки няма да се изпълняват едновременно;

2. ограничения за срока на предаване на поръчките.

Най-напред да разгледаме първия тип ограничения. Две поръчки i и j, чието време за изпълнение е p_i и p_j съответно, няма да се изпълняват едновременно, ако

- или $x_j \geq x_i + p_i$,

- или $x_i \geq x_j + p_j$

в зависимост от това дали изпълнението на поръчка i предшества изпълнението на поръчка j или обратното.

Тъй като всички добре построени математически модели имат *съвместими ограничения*, ще се опитаме да преобразуваме ограниченията от тип *или–или*, като въведем нова двоична променлива

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако поръчка } i \text{ предшества поръчка } j, \\ 0, & \text{ако поръчка } j \text{ предшества поръчка } i. \end{cases}$$

При достатъчно голямо M ограничение от типа *или–или* се преобразува в следните две съвместими ограничения

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ и } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i.$$

Посоченото преобразование гарантира, че само едно от двете ограничения може да бъде активно (да се изпълнява като равенство) в произволен момент от времето. Ако $y_{ij} = 0$, първото ограничение е активно, а второто — излишно (тъй като лявата му страна ще съдържа величината M, която е много по-голяма от p_i). Ако $y_{ij} = 1$, първото ограничение е излишно, а второто — активно.

Да разгледаме сега ограниченията за сроковете за предаване на поръчките. При дадена дата d_j за предаване на поръчка j да въведем свободна променлива s_j. Тогава съответното ограничение приема вида

$$x_j + p_j + s_j = d_j.$$

Ако $s_j \geq 0$, то поръчката се предава в срок, а ако $s_j < 0$, компанията плаща глоби, свързани с просрочването на поръчката. Като използваме стандартната смяна

$$s_j = s_j^+ - s_j^-, \quad s_j^+, s_j^- \geq 0,$$

преобразуваме ограничението във вида

$$x_j + s_j^+ - s_j^- = d_j - p_j.$$

Глобата за просрочените поръчки е пропорционална на s_j^-.

Окончателно математическият модел на дадената задача е

$$\min z = 19s_1^- + 12s_2^- + 34s_3^-$$

при ограничения

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + My_{12} \geq 20,\\
&-x_1 + x_2 - My_{12} \geq 5 - M,\\
&x_1 - x_3 + My_{13} \geq 15,\\
&-x_1 + x_3 - My_{13} \geq 5 - M,\\
&x_2 - x_3 + My_{23} \geq 15,\\
&-x_2 + x_3 - My_{23} \geq 20 - M,\\
&x_1 + s_1^+ - s_1^- = 25 - 5,\\
&x_2 + s_2^+ - s_2^- = 22 - 20,\\
&x_3 + s_3^+ - s_3^- = 35 - 15,\\
&x_1, x_2, x_3, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, s_3^+, s_3^- \geq 0,\\
&y_{12}, y_{13}, y_{23} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Двоичните променливи y_{12}, y_{13} и y_{23} са въведени за преобразуване на ограниченията от тип *или–или* в съвместими ограничения. Получената задача е смесено целочислена задача на линейното оптимиране.

За да решим задачата, избираме $M = 100$ — число, което е по-голямо от сумата на времената за изпълнение и на трите поръчки.

Оптималното решение е $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 25$. Следователно оптималният ред за изпълнение на поръчките е $2 \to 1 \to 3$. В съответствие с това оптимално решение поръчка 2 се изпълнява за време $0+20 = 20$, поръчка 1 — за време $20 + 5 = 25$ и поръчка 3 за $25 + 15 = 40$ дни. Тогава просрочването на поръчка 3 е $40 - 35 = 5$ дни, за което глобата е $5 \times 34 = 170$ лв.