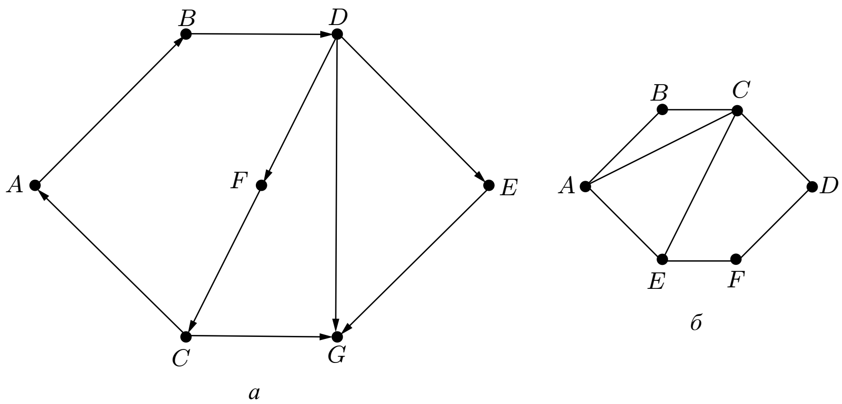
Ориентирани графи[1]

Графът е основно математическо понятие, което се използва в мрежовото планиране. Под *граф* $G(X,E)$ се разбира множество от точки X и свързващи ги отсечки E. Прието е елементите на X да се наричат *върхове на графа*, а елементите на E — *ребра* (в случай, че графът е неориентиран) или *дъги* (ако графът е ориентиран). Един граф се нарича *ориентиран*, когато елементите на E имат посока, т. е. за всеки от тях са посочени началото и краят му. На фиг. 1*а* е показан ориентиран граф, като посоката на дъгите е означена със стрелка. На фиг. 1*б* графът е неориентиран — ребрата, свързващи отделните върхове, нямат определена посока.

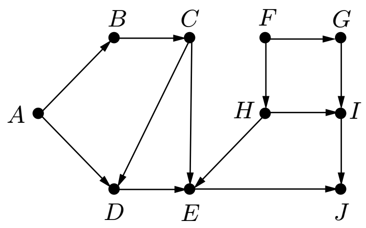


Фигура 1

За целите на мрежовото планиране ще използваме само ориентирани графи и за това ще се ограничим с тяхното разглеждане.

Под *път*, свързващ два определени върха x_1 и x_2 в един граф, ще разбираме последователност от дъги, началото на първата от които е x_1, а краят на последната — x_2, като при това началото на всяка следваща дъга съвпада с края на предишната. Например на фиг. 1*а* последователността от дъги (A,B), (B,D), (D,E), (E,G) представлява път, свързващ върховете A и G. При това пътищата, свързващи два върха, могат да бъдат няколко. A и G се свързват и посредством пътищата (A,B), (B,D), (D,G) и (A,B), (B,D), (D,F), (F,C), (C,G). Път, в който началният и крайният връх съвпадат, се нарича *цикъл*. Един от циклите на фиг. 1*а* е (A,B), (B,D), (D,F), (F,C), (C,A). Ние ще разглеждаме графи, в които няма цикли. Те се наричат *ациклични*. Такъв е

[1]Този материал е взет от учебника на доц. Митев *Математика за географи*, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София, 1995, ISBN 954–0579–7.



Фигура 2

например графът на фиг. 2. Още едно условие, което ще искаме, е графът да бъде *свързан*, т. е. да не се разпада на два или повече подграфа, между които не съществуват дъги. По-точно, ако разгледаме графа като неориентиран, т. е. дъгите заменим с ненасочени ребра, то всеки два върха трябва да са свързани с поне една последователност от ребра.

И така, ще се занимаваме със свързани ациклични ориентирани графи.

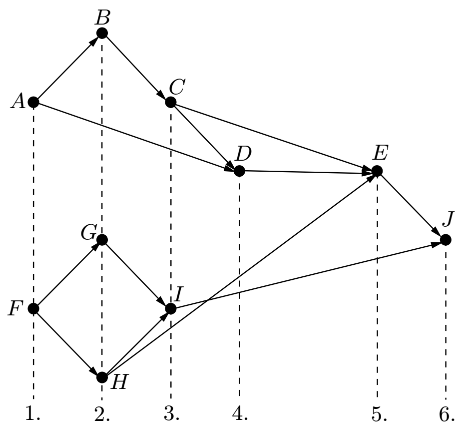
Даден граф може да бъде описан по различни начини, един от които е графичният, но той в повечето случаи се използва само като илюстрация. Друг начин е чрез *матрица на съседност* на графа, която го описва напълно еднозначно. Таблица 1 представлява *матрицата на съседност* на графа от фиг. 2. В действителност това е една квадратна таблица от нули и единици (в която за прегледност сме записали само единиците, а празните места съответстват на нулите) с брой редове и стълбове, равен на броя на върховете на графа. Наличието на единица в определен ред и стълб показва, че

Таблица 1. Матрица на съседност

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		1		1						
B			1							
C				1	1					
D					1					
E										1
F							1	1		
G									1	
H					1				1	
I										1
J										

върхът, съответстващ на реда, е начало на дъга с край във върха, съответстващ на стълба. Очевидно попълването на матрицата на съседност на зададен графично граф е елементарно.

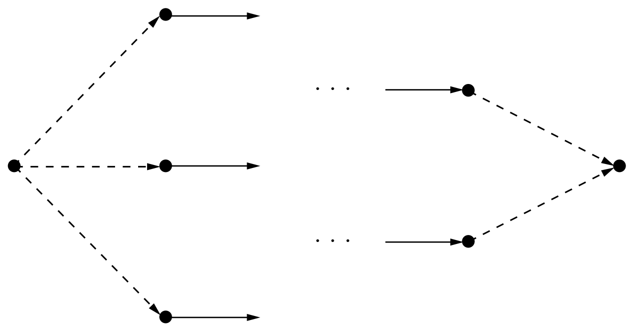
Върховете на всеки ориентиран свързан граф без цикли могат да се разделят на групи, наречени *нива*. На дадено ниво принадлежат върховете, които не са свързани помежду си с дъги. Ако номерираме нивата, то в първото ниво влизат върхове, които не са краища на нито една дъга; във второто влизат тези, които са краища само на дъги, започващи от първо ниво и т.н. Изобщо ниво i съдържа върхове, които са краища на дъги, започващи само от нива с номер, по-малък от i. Последното ниво съдържа тези върхове, които не са начало на нито една дъга. Определянето на нивата в даден граф може да се направи лесно чрез използване на матрицата на съседност. Нека подредим по нива графа на фиг. 2, който е зададен и с матрицата на съседност от табл. 1. Сумираме елементите на матрицата по стълбове и отделяме тези стълбове, чиито суми са нули. В случая това са стълбовете, отговарящи на върховете A и F. Тези два върха образуват първото ниво. След това изключваме от по-нататъшно разглеждане редовете на A и F и сумираме пак стълбовете на матрицата на съседност. Този път нулеви суми имат стълбовете на B, G и H. Тези върхове образуват второто ниво. По същия начин изключваме техните редове и при третото сумиране на стълбовете получаваме третото ниво — върховете C и I. Четвъртото, петото и шестото (последно) ниво съдържат по един връх — съответно D, E и J. След подреждането на върховете нанасяме и свързващите ги дъги. Това правим като използваме или графичното изображение от фиг. 2, или матрицата на съседност (табл. 1). Подреденият по нива граф е показан на фиг. 3.



Фигура 3

Ако разгледаме по-внимателно графа от фиг. 3, забелязваме, че върховете му могат да се подредят по нива и по друг начин. Например върхът I може да бъде в 4-то и дори в 5-то ниво без да влезем в противоречие с дадената дефиниция. Наистина подреждането на върховете на даден граф по нива не е еднозначно. Обикновено то може да стане по няколко начина, но за нашите цели кой от възможните начини е реализиран, ще бъде без особено значение. За нас по-важно е *първото и последното ниво да съдържат по един връх*, което, например за графа от фиг. 3, не е изпълнено — първото ниво се състои от два върха. За да удовлетворим това изискване, можем да въвеждаме т. нар. *фиктивни върхове и дъги*, както е показано на фиг. 4.

На всяка от дъгите на графа може да бъде съпоставено положително число (на фиктивните дъги се съпоставят нули). Тези числа се наричат *цени* или *тегла* на дъгите и в зависимост от конкретния случай изразяват време или количества от един или друг ресурс.



Фигура 4