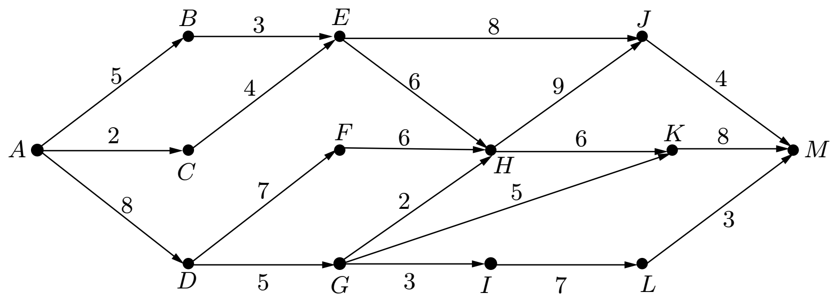
Метод на критичния път[1]

След построяването на мрежовия график следва неговото анализиране. Първият и най-естествен въпрос е каква е общата продължителност на строежа — колко време е необходимо от настъпването на събитието A до настъпването на събитието M. Отговор на този въпрос, а след това и основа за оптимизирането (намаляването на продължителността) ни дава т. нар. *метод на критичния път*. Ще го илюстрираме върху мрежовия график от фиг. 1.



Фигура 1

Въвеждаме понятието *най-ранен момент* за настъпване на едно събитие. Това е най-ранният момент, в който са завършени всички операции, предшестващи събитието. За най-ранен момент за настъпване на събитието A можем да вземем $t_{нр}(A) = 0$, което не е задължително. След това започваме да пресмятаме най-ранните моменти за върховете от второ ниво:

$$\begin{aligned} t_{нр}(B) &= t_{нр}(A) + 5 = 5, \\ t_{нр}(C) &= t_{нр}(A) + 2 = 2, \\ t_{нр}(D) &= t_{нр}(A) + 8 = 8. \end{aligned}$$

Най-ранните моменти за върховете от трето ниво се пресмятат, след като вече са пресметнати за тези от второто (и от първото) ниво. Изобщо пресмятането на най-ранните моменти за върховете от кое да е ниво може да започне след като са известни най-ранните моменти за всички предишни нива. За третото ниво имаме

$$\begin{aligned} t_{нр}(E) &= \max\{t_{нр}(B) + 3, t_{нр}(C) + 4\} = \max\{8, 6\} = 8, \\ t_{нр}(F) &= t_{нр}(D) + 7 = 15, \end{aligned}$$

[1]Този материал е взет от учебника на доц. Митев *Математика за географи*, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София, 1995, ISBN 954–0579–7.

$$t_{\text{нр}}(G) = t_{\text{нр}}(D) + 5 = 13.$$

Забелязваме, че $t_{\text{нр}}(E)$ бе пресметнато по-сложно. Понеже събитието E е край на две операции (B, E) и (C, E), то това събитие може (по дефиниция) да настъпи, когато завършат и двете операции, т. е. когато завърши по-късната.

Изобщо, ако за върха, означен с i, u_i означава множеството от върхове, които са начала на операции, завършващи в i, то общата формула за пресмятане на най-ранния момент е

$$t_{\text{нр}}(i) = \max_{j \in u_i}\{t_{\text{нр}}(j) + c_{ij}\}.$$

Използвайки формулата, пресмятаме и останалите най-ранни моменти на нашия мрежов график:

$$\begin{aligned}
t_{\text{нр}}(H) &= \max\{t_{\text{нр}}(E) + 6, t_{\text{нр}}(F) + 6, t_{\text{нр}}(G) + 2\}\\
&= \max\{14, 21, 15\} = 21,\\
t_{\text{нр}}(I) &= t_{\text{нр}}(G) + 3 = 16,\\
t_{\text{нр}}(J) &= \max\{t_{\text{нр}}(E) + 8, t_{\text{нр}}(H) + 9\} = \max\{16, 30\} = 30,\\
t_{\text{нр}}(K) &= \max\{t_{\text{нр}}(H) + 6, t_{\text{нр}}(G) + 5\} = \max\{27, 18\} = 27,\\
t_{\text{нр}}(L) &= t_{\text{нр}}(I) + 7 = 23,\\
t_{\text{нр}}(M) &= \max\{t_{\text{нр}}(J) + 4, t_{\text{нр}}(K) + 8, t_{\text{нр}}(L) + 3\}\\
&= \max\{34, 35, 26\} = 35.
\end{aligned}$$

Получихме, че най-ранният момент за настъпване на събитието M е 35-ият ден. Следователно продължителността на цялата дейност е 35 дни и от начина, по който я пресметнахме, е ясно, че тя не може да се намали при дадените продължителности на отделните операции.

Да въведем още една оценка на времето за всеки от върховете, наречена *най-късен момент* за настъпване на дадено събитие. Това ще рече най-късния момент, в който могат да започнат операциите с начала в този връх, без да се измени общото време за завършване на цялата дейност (в случая 35 дни). Ако с v_i означим множеството от върхове, които са краища на операции с начало във връх i, то общата формула за пресмятане на най-късния момент е

$$t_{\text{нк}}(i) = \min_{j \in v_i}\{t_{\text{нк}}(j) - c_{ij}\},$$

като за най-късен момент на върха от последното ниво приемем пресметнатия най-ранен. В нашия случай

$$t_{\text{нк}}(M) = t_{\text{нр}}(M) = 35.$$

Останалите най-късни моменти се пресмятат в обратен ред, т. е. за да ги пресметнем за върховете на дадено ниво, трябва вече да сме ги пресметнали за върховете от всички нива с по-горен номер.

За мрежовия график от фиг. 1 те са

$$\begin{aligned}
t_{\text{нк}}(J) &= t_{\text{нк}}(M) - 4 = 31,\\
t_{\text{нк}}(K) &= t_{\text{нк}}(M) - 8 = 27,\\
t_{\text{нк}}(L) &= t_{\text{нк}}(M) - 3 = 32,\\
t_{\text{нк}}(H) &= \min\{t_{\text{нк}}(J) - 9, t_{\text{нк}}(K) - 6\} = \min\{22, 21\} = 21,\\
t_{\text{нк}}(I) &= t_{\text{нк}}(L) - 7 = 25,\\
t_{\text{нк}}(E) &= \min\{t_{\text{нк}}(J) - 8, t_{\text{нк}}(H) - 6\} = \min\{23, 15\} = 15,\\
t_{\text{нк}}(F) &= t_{\text{нк}}(H) - 6 = 15,\\
t_{\text{нк}}(G) &= \min\{t_{\text{нк}}(H) - 2, t_{\text{нк}}(K) - 5, t_{\text{нк}}(I) - 3\}\\
&= \min\{19, 22, 22\} = 19,\\
t_{\text{нк}}(B) &= t_{\text{нк}}(E) - 3 = 12,\\
t_{\text{нк}}(C) &= t_{\text{нк}}(E) - 4 = 11,\\
t_{\text{нк}}(D) &= \min\{t_{\text{нк}}(F) - 7, t_{\text{нк}}(G) - 5, t_{\text{нк}}(I) - 9\}\\
&= \min\{8, 14, 16\} = 8,\\
t_{\text{нк}}(A) &= \min\{t_{\text{нк}}(B) - 5, t_{\text{нк}}(C) - 2, t_{\text{нк}}(D) - 8\}\\
&= \min\{7, 9, 0\} = 0.
\end{aligned}$$

Ако нанесем най-ранните и най-късните моменти за настъпване на отделните събития в табл. 1, то забелязваме, че за някои от тях $t_{\text{нр}}$ и $t_{\text{нк}}$ съвпадат. Това са събитията A, D, F, H, K, M. Операциите, които свързват тези събития, се наричат *критични*. Те образуват един път, свързващ началото A с края на мрежовия график M. Този път се нарича *критичен* за мрежовия график. Това е всъщност пътят с най-голяма дължина (с най-голяма сума на операциите, които съдържа), свързващ A и M. Неговата дължина съвпада с продължителността на цялата дейност. В нашия случай критичният път съдържа операциите (A, D), (D, F), (F, H), (H, K), (K, M) и сумата от

Таблица 1

Връх	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$t_{\text{нр}}$	0	5	2	8	8	15	13	21	16	30	27	23	35
$t_{\text{нк}}$	0	12	11	8	15	15	19	21	25	31	27	32	35

продължителностите им е наистина 35. Оттук следва и обяснението на наименованието му: пътят и операциите от него се наричат критични, защото всяко удължаване на продължителността на коя да е от операциите води до увеличаване на времето за извършване на цялата дейност. С други думи, *не може да се забави нито една от критичните операции, без това да удължи крайния срок за завършване*.

В един мрежов график критичният път не е задължително да бъде единствен. Може да се случи няколко пътя, свързващи началния и крайния връх, да имат еднаква продължителност, равна на продължителността на цялата дейност, т. е. да бъдат критични. Такъв е, например, мрежовият график от зад. 5 в този файл.

Операциите, които не лежат на критичния път (или пътища), притежават т. нар. *резерви от време*. Тяхното изпълнение може да се забави в известни граници, без това да повлияе на крайния момент на завършване на цялата дейност. Използват се няколко резерва от време, всеки от които има определено съдържание:

а) *пълен резерв* — пресмята се по формулата

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{нк}}(j) - t_{\text{нр}}(i) - c_{ij}$$

и представлява *максималното време, с което можем да забавим операцията* (i, j)*, без да удължим крайния срок за завършване*. Ако продължителността на една операция се удължи с пълния ѝ резерв, то тя става критична, т. е. в графика се появява нов критичен път, който я съдържа. Липсата на пълен резерв ($R_{\text{п}} = 0$) е условие за откриване на критичните операции в даден мрежов график;

б) *частен резерв от 1-ви вид* — пресмята се по формулата

$$R'_{\text{ч}}(i, j) = t_{\text{нк}}(j) - t_{\text{нк}}(i) - c_{ij}$$

и представлява *максималното време, с което може да се удължи продължителността на операцията* (i, j)*, без това да доведе до намаляване на пълните резерви на нито една предшестваща я операция*, т. е. *всяка от предшестващите я операции може да завърши в най-късния възможен момент*;

в) *частен резерв от 2-ри вид* — пресмята се по формулата

$$R''_{\text{ч}}(i, j) = t_{\text{нр}}(j) - t_{\text{нр}}(i) - c_{ij}$$

и дава *максималното време за удължаване продължителността на операцията* (i, j)*, без това да доведе до изменение на пълните резерви на всички операции, следващи* (i, j);

г) *независим резерв* — пресмята се по формулата

$$R_{\text{н}}(i, j) = \max\{0, t_{\text{нр}}(j) - t_{\text{нк}}(i) - c_{ij}\}$$

и представлява *времето, с което може да се увеличи продължителността на операцията* (i, j)*, без това да повлияе на пълните резерви на нито една от останалите операции*. От формулата виждаме, че независим резерв може и да не съществува, т. е. той да бъде нула.

Табл. 2 съдържа резервите от време за операциите на мрежовия график от фиг. 1.

Таблица 2

Операция	$R_{\text{п}}$	$R'_{\text{ч}}$	$R''_{\text{ч}}$	$R_{\text{н}}$	Операция	$R_{\text{п}}$	$R'_{\text{ч}}$	$R''_{\text{ч}}$	$R_{\text{н}}$
(A,B)	7	7	0	0	(G,H)	6	0	6	0
(A,C)	9	9	0	0	(G,K)	9	3	9	3
(A,D)	0	0	0	0	(G,I)	9	3	1	0
(B,E)	7	0	0	0	(H,J)	1	1	0	0
(C,E)	9	0	2	0	(H,K)	0	0	0	0
(D,F)	0	0	0	0	(I,L)	8	0	0	0
(D,G)	6	6	0	0	(J,M)	1	0	1	0
(E,J)	15	8	14	7	(K,M)	0	0	0	0
(E,H)	7	0	7	0	(L,M)	8	0	8	0
(F,H)	0	0	0	0					

Резервите от време се използват за оптимизация върху мрежовия график. Един от начините е да се вземат ресурси (работна сила, техника) от операциите, които имат резерв от време, така че съответният резерв при неминуемото удължаване на тези операции да не се надхвърли, и тези ресурси да се прехвърлят на някоя от критичните операции. Това ще доведе до намаляване на дължината на критичния път и оттам на продължителността на цялата дейност.

Резервите от време може да се използват и при нарушаване на изпълнението на критичните операции по време на работа за преразпределяне на ресурсите и спазване на крайния срок.