Примерно решение на домашно №1 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток, зимен семестър на 2014/2015 г..

Зад. 1 Използвайки табличния метод, докажете, че съжденията $(p \wedge q) \rightarrow r$ и $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ са еквивалентни.

Решение:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

От равенството на петата и седмата колона следва, че твърденията са еквивалентни.

Зад. 2 Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Решение: Ще докажем твърдението с индукция по n.
База: За $n = 1$ твърдението е

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^1 \, 1 \left(\frac{1+1}{2} \right)$$

Лявата страна е:

$$(-1)^1 \, 1^2 = -1$$

Дясната страна е

$$(-1)^1 \, 1 \left(\frac{2}{2} \right) = -1$$

Твърдението в базовия случай е вярно. ✓
Индукционно предположение: Допускаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

за някое цяло положително n.
Индукционна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Твърдението е:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^{n+1} \, (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \tag{1}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i\, i^2 = \\
&\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, i^2\right) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = && \text{(съгласно индукционното предположение)} \\
&(-1)^n\, n \left(\frac{n+1}{2}\right) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \\
&(-1)^n (n+1) \left(\frac{n}{2} - (n+1)\right) = \\
&(-1)^n (n+1) \left(-\frac{n}{2} - 1\right) = \\
&(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \\
&(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n+2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания и индукционното предположение, че лявата страна на (1) е равна на дясната. ✓

Зад. 3 Нека x е произволно реално число, такова че $x > -1$. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Решение: Ще докажем твърдението с индукция по n.
База: За $n = 1$ твърдението е

$$1 + x \geq 1 + x$$

което е тривиално вярно. ✓
Индукционно предположение: Допускаме, че

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

за някое положително n.
Индукционна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Твърдението е:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \tag{2}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq && \text{(съгласно индукционното предположение)} \\
&(1+nx)(1+x) = \\
&1 + x + nx + nx^2 = \\
&1 + (n+1)x + nx^2 \geq && \text{(тъй като } nx^2 \geq 0) \\
&1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

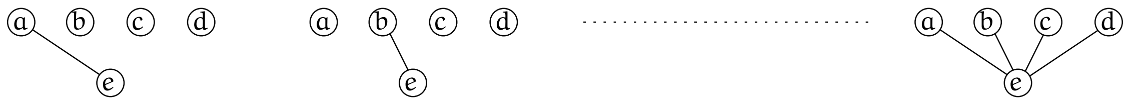
Доказахме чрез еквивалентни преобразувания, индукционното предположение и очевидни неравенства, че лявата страна на (2) е по-голяма или равна на дясната. ✓

Зад. 4 Дадено е множество $A = \{a, b, c, d, e\}$. Напишете в явен вид всички релации на частична наредба над A, в които елементите a, b и c са минимални. Релациите може да пишете като множества от наредени двойки или чрез диаграми (графи) или чрез диаграми на Хасе.

Решение: Ще използваме диаграми на Хасе.

А. Има точно една релация, в която и петте елемента са миминални:

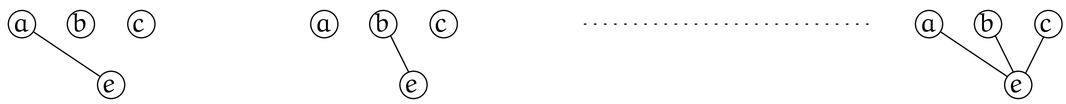
Б. Има точно петнадесет релации, в които точно e не е минимален:



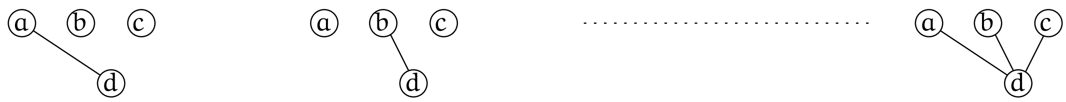
Аналогично, има точно петнадесет релации, в които точно d не е минимален. Общо има точно тридесет релации, в които точно четири елемента са минимални, като a, b и c са измежду минималните.

В. Да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални. Те се разбиват на тези, в които d и e не са сравними, и на тези, в които d и e са сравними.

В.1 Има точно $7 \times 7 = 49$ релации, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними. Причината е, че ако игнорираме d, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални:

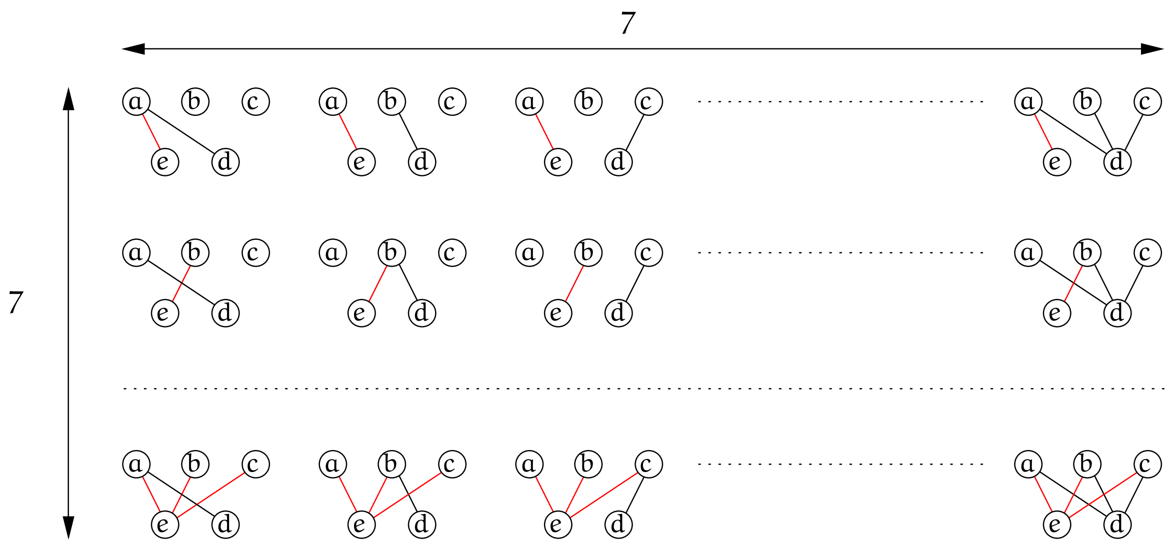


Да наречем множеството от тези релации, R_1. Аналогично, ако игнорираме e, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални.

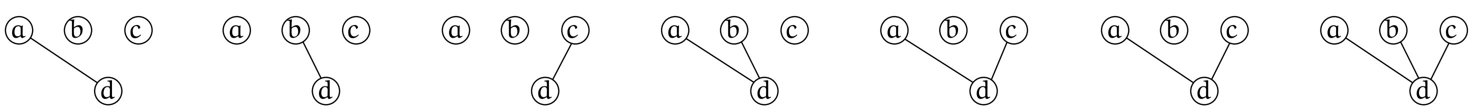


Да наречем множеството от тях, R_2.

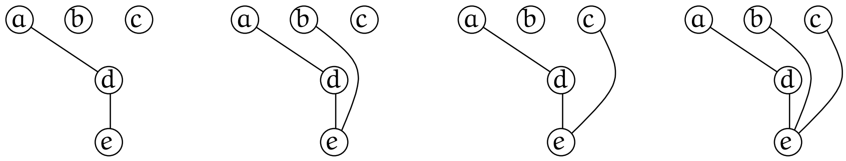
Всяка от релациите, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними, се получава чрез комбинирането на една релация от R_1 и една релация от R_2, като при комбинирането общите елементи (които са a, b и c) се идентифицират. Очевидно става дума за $7 \times 7 = 49$ релации:



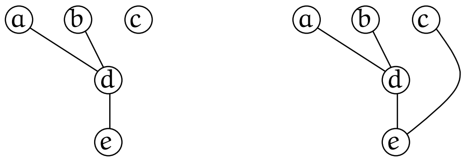
В.2 Сега да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални, а d и e са сравними. Първо ще разгледаме тези, в който d предхожда e. Те са 19 на брой, което получаваме със следните разсъждения. Има седем възможности за това, кои измежду a, b и c да предхождат d (e не е показан):



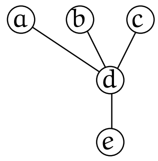
Елементът e може да бъде добавен по 4 начина към всяка от първите три възможности, примерно



Към всяка от вторите три възможности елементът e може да бъда добавен по два начина, примерно:



Към последната, седмата възможност, e може да бъде добавен по точно един начин:



И така, релациите, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и d предхожда e, са

$$4 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$

Очевидно тези релации, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и e предхожда d, са също 19. Общият брой на релациите в **В.2** е $19 + 19 = 38$. И общият брой на релациите в **В** е $49 + 38 = 87$.

Решението на задачата се получава чрез сумиране на подрешенията в **А**, **Б** и **В**, а именно

$$1 + 30 + 87 = 118$$

Това е броят на релациите, в които a, b и c са минимални.

Зад. 5 Дадено е крайно непразно множество A и релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така:

$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R$ тогава и само тогава, когато $|X| \leq |Y|$.

Изследвайте R за шестте свойства на релации над Декартов квадрат. Това означава, за всяко от шестте свойства (стр. 12 в учебника), определете дали R притежава свойството, или не. И в двата случая обосновете добре отговорите си.

Решение: R е рефлексивна, понеже всяко подмножество на A има същата мощност като себе си, така че $|A| \leq |A|$ за всяко можество A. R не е антирефлексивна по същата причина. R не е симетрична, понеже ако две множества A и B е вярно, че $|A| \leq |B|$, от това не следва непременно, че $|B| \leq |A|$. R не е слабо антисиметрична, защото има двойки различни подмножества на A с една и съща мощност. R не е силно антисиметрична по същата причина. R е транзитивна, защото ако едно множество има мощност не по-голяма от мощността на друго множество, а другото, не по-голяма мощност от мощността на трето множество, то първото има не по-голяма мощност от мощността на третото.

Зад. 6 Дадени са две релации на еквивалентност $R_1 \subseteq A \times A$ и $R_2 \subseteq A \times A$ над крайно множество A. За всяка от следните три релации:

а) $R_1 \cap R_2$,

б) $R_1 \cup R_2$,

в) $R_1 \triangle R_2$

определете дали тя е релация на еквивалентност. Обосновете добре отговорите си.

Решение: $R_1 \cap R_2$ е релация на еквивалентност, което сега ще докажем.

- Щом R_1 и R_2 са рефлексивни, всяка от тях съдържа наредените двойки (a, a), по всички елементи $a \in A$. Тогава сечението им също съдържа всички тези двойки, тоест $\forall a \in A : (a, a) \in R_1 \cap R_2$. Следователно, сечението е рефлексивна релация.

- Да разгледаме произволни $a, b \in A$, такива че $a \neq b$. Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

  Случай 1 $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$.

  Случай 2 $(a, b) \notin R_1 \wedge (b, a) \notin R_1$.

  Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

  Случай 3 $(a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2$.

  Случай 4 $(a, b) \notin R_2 \wedge (b, a) \notin R_2$.

  Ако **Случай 1** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \in R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 1** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Тъй като тези комбинации от случаи са изчерпателни, то или и двете наредени двойки (a, b) и (b, a) са в сечението, или и двете не са. Следователно, сечението е симетрична релация.

- Да разгледаме произволни три елемента $a, b, c \in A$. Тъй като R_1 е транзитивна, то

  $$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \rightarrow (a, c) \in R_1 \tag{3}$$

  Аналогично,

  $$(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \rightarrow (a, c) \in R_2 \tag{4}$$

  Нека p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 са съжденията

  - p_1: $(a, b) \in R_1$,
  - q_1: $(b, c) \in R_1$,
  - r_1: $(a, c) \in R_1$,
  - p_2: $(a, b) \in R_2$,
  - q_2: $(b, c) \in R_2$,
  - r_2: $(a, c) \in R_2$.

  Ако преведем (3) и (4) на езика на съждителната логика, (3) е

  $$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \tag{5}$$

  а (4) е

  $$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \tag{6}$$

И двете са изпълнени, следователно в сила е тяхната конюнкция. Това, което искаме да докажем за $R_1 \cap R_2$, е а именно, че е транзитивна, на езика на съждителната логика е

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2) \tag{7}$$

Ще докажем, че импликацията

$$((p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_1)) \rightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2)) \tag{8}$$

е тавтология. Понеже броят на съжденията е 6, доказателство с таблица не е практично. Можем да разсъждаваме така: какво трябва да е изпълнено за съжденията в импликацията в (8), така че импликацията да е лъжа? Знаем, че импликация е лъжа тогава и само тогава, когато антецедентът е истина, а консеквентът е лъжа. Да видим кога консеквентът е лъжа. Прилагаме свойствата на импликацията (понеже самият консеквент е импликация) и законите на Де Морган към консеквента на (8) и получаваме, че е еквивалентен на

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee (r_1 \wedge r_2)$$

За да бъде лъжа, трябва p_1, p_2, q_1, q_2 да са истина, а поне едно от r_1 и r_2 е лъжа. Ако заместим съжденията в антецедента на (8) с тези логически стойности, ще получим, че

$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1$ или $p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2$ е лъжа

Но тогава и антецедентът е лъжа. Доказахме, че при единствената възможна стойност на съжденията, такава че консеквентът е лъжа, антецедентът също е лъжа. Следователно, при тези стойности на участващите прости съждения, цялата импликация в (8) е истина. Доказахме, че импликацията в (8) е истина за всички възможности за истина/лъжа на участващите прости съждения. Тоест, тя е тавтология.

Следователно, $R_1 \cap R_2$ е транзитивна.

$R_1 \cup R_2$ не е релация на еквивалентност. За да докажем това, достатъчно е да покажем две *конкретни* релации на еквивалентност R_1 и R_2, такива че обединението им не е релация на еквивалентност. Забележете разликата с предното доказателство: по отношение на него *не е* достатъчно да покажем, че за две конкретни релации на еквивалентност, тяхното сечение също е релация на еквивалентност! Причината е, че всъщност в тази задача доказваме твърдения от вида

> за всяка релация на еквивалентност R_1, за всяка релация на еквивалентност R_2, в сила е ...

Доказателството, че твърдението е вярно, не може да стане чрез разглеждане на конкретни релации, защото релациите на еквивалентност са безброй и няма как да проверим верността на твърдението с разглеждане на конкретни релации. Обаче доказателството, че твърдението не е вярно, може да стане чрез разглеждане на само две конкретни релации, за които твърдението е лъжа. Такава двойка релации се нарича *контрапример*. За да се убедим, че един контрапример е достатъчен, може да образуваме отрицанието на посоченото твърдение и да съобразим, че тогава двата универсални квантора стават екзистенциални.

И така, контпрапример е $A = \{a, b, c, d\}$,

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

и

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (d, d), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (d, a), (d, b)\}$$

Лесно се вижда, че обединението им не е релация на еквивалентост, защото не е транзитивна: тя съдържа (c, a) и (a, d), но не съдъкра (c, d).

$R_1 \triangle R_2$ също не е релация на еквивалентност. Контрапример е $A = \{a\}$ и $R_1 = \{(a, a)\}$, $R_2 = \{(a, a)\}$. Очевидно $R_1 \triangle R_2 = \emptyset$ не е рефлексивна.