Семестриално контролно по ДС за КН 1-ви поток, 27.11.2014г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Докажете, че $2^{3n} - 7n - 1$ се дели на 49 за всяко цяло число $n \geq 0$.

Задача 2 Докажете, че формулата $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ важи за произволни множества A, B и C.

Задача 3 Нека F е множеството от всички тотални функции от вида $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2 \ldots 7\}$. Нека R е релация над F, такава че $fRg \iff \forall x \in \{a, b, c, d\} \quad f(x) \equiv g(x) \pmod 2$.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Намерете колко са функциите в F и колко са класовете на еквивалентност на R.

Задача 4 Механизмът на сейф се състои от седем колелца, всяко от които може да заема десет различни позиции, обозначени с цифрите от 0 до 9. Когато механизмът работи правилно, само една седемцифрена поредица може да отвори сейфа.

Поради повреда в механизма сейфът се отваря, ако поне четири от седемте колелца са в правилно положение. Колко са седемцифрените поредици, отключващи повредения сейф ?

Задача 5 При едно проучване, проведено сред 35 студенти, се установило, че плуване спортуват 23 студенти, бягане – 26, волейбол – 24.

След второ, по-подробно проучване било допълнително установено, че плуване и волейбол спортуват 15 студенти, плуване и бягане – 16, волейбол и бягане – 17, а с трите вида спорт се занимават 9 студенти. Колко студенти не спортуват нито плуване, нито бягане, нито волейбол ?

Задача 6 Редицата на Фибоначи F_n е дефинирана с условията: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n > 1$.

Редицата R_n е дефинирана с условията: $R_0 = 1, R_1 = 1, R_n = R_0 + R_1 + \ldots + R_{n-2}$ за $n > 1$.

Докажете, че $R_n = F_n$ за $n > 0$.

Примерни решения

Задача 1 Да означим израза с $f(n) = 2^{3n} - 7n - 1$.

Очевидно $f(0) = 0$ се дели на 49.

Нека допуснем, че $f(n)$ се дели на 49.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2^{3(n+1)} - 7(n+1) - 1 \\ &= 2^{3n+3} - 7n - 7 - 1 \\ &= 2^3 2^{3n} - 7n - 8 \\ &= 8.2^{3n} - 8(7n+1) + 8(7n+1) - 7n - 8 \\ &= 8(2^{3n} - 7n - 1) + 56n + 8 - 7n - 8 \\ &= 8f(n) + 49n \end{aligned}$$

Представихме $f(n+1)$ като сума на $8f(n)$ и $49n$. Двете събираеми се делят на 49, следователно и $f(n+1)$ се дели на 49.

Получихме, че ако $f(n)$ се дели на 49, то $f(n+1)$ също се дели на 49.

От принципа на индукцията следва, че за всяко $n \geq 0$ изразът $f(n) = 2^{3n} - 7n - 1$ се дели на 49.

Задача 2 Оставяме на читателя тази лесна задача ...

Задача 3 Нека f, g и h са функции от F.

$\forall x \in \{a, b, c, d\} \quad f(x) \equiv f(x) \pmod 2$, следователно fRf, тоест R е рефлексивна.

$\forall x \in \{a, b, c, d\} \quad (f(x) \equiv g(x) \pmod 2) \to (g(x) \equiv f(x) \pmod 2)$, следователно $fRg \to gRf$, тоест R е симетрична.

$\forall x \in \{a, b, c, d\} \quad ((f(x) \equiv g(x) \pmod 2) \wedge (g(x) \equiv h(x) \pmod 2)) \to (f(x) \equiv h(x) \pmod 2)$, следователно $(fRg) \wedge (gRh) \to fRh$, тоест R е транзитивна.

От трите разсъждения по-горе следва, че R е релация на еквивалентност.

Нека съпоставим на $f \in F$ редицата $B(f) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, където $\alpha_1 = f(a) \pmod 2$, $\alpha_2 = f(b) \pmod 2$, $\alpha_3 = f(c) \pmod 2$, $\alpha_4 = f(d) \pmod 2$.

Очевидно $B(f)$ е редица от нули и единици. Произволни $f \in F$, $g \in F$ имат съвпадащи редици $B(f)$ и $B(g)$ точно когато fRg.

Следователно изображението B съпоставя една и съща булева редица $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ на всички функции от един клас на еквивалентност на R и различни булеви редици на функции от различни класове.

Изображението B поражда биекция между класовете на еквивалентност на R и булевите редици с дължина 4, следователно броят на класовете е 2^4.

Броят на функциите $f \in F$ е 7^4 (това са всички редици от 4 елемента, като всеки елемент има 7 възможни стойности).

Задача 4 Нека с A_k означим множеството от поредици, съвпадащи с отключващата поредица на точно k места.

Очевидно ще можем да отключим повредения сейф само с поредица от A_4, A_5, A_6 или A_7 и тия множества не се пресичат.

Следователно броят на отключващите поредици е $n = |A_4| + |A_5| + |A_6| + |A_7|$.

Броят на елементите на A_4 е $\binom{7}{4}9^3$, защото можем по $\binom{7}{4}$ начина да изберем 4-те позиции, за които знаем кода, и по 9^3 начина да сбъркаме в останалите 3 позиции.

Аналогично A_5 има $\binom{7}{5}9^2$ елемента, A_6 има $\binom{7}{6}9$ елемента, A_7 има $\binom{7}{7} = 1$ елемент.

Броят на всички отключващи поредици е:

$$n = \binom{7}{4}9^3 + \binom{7}{5}9^2 + \binom{7}{6}9 + 1$$

Оставяме на читателя да пресметне конкретната числова стойност на n.

Има хипотеза, че $n = 27280$, но не съм го пресмятал, един приятел ми го каза.

Задача 5 Да означим с A_1, A_2, A_3 множествата студенти, спортуващи съответно плуване, бягане и волейбол.

Прилагаме принципа за включване и изключване:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

От условието на задачата знаем всички събираеми в дясната част на горното равенство, заместваме:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 23 + 26 + 24 - 16 - 15 - 17 + 9 = 34$

Следователно от всички 35 студенти 34 спортуват поне един от трите вида спорт, а един не спортува (възможно е да играе шах или бридж).

Задача 6 Очевидно $R_1 = F_1 = 1$ и $R_2 = F_2 = 1$.

За $n > 2$ можем да опростим рекурентното равенство за R_n:

$$\begin{aligned}
R_n &= R_0 + \ldots + R_{n-2} \\
R_n &= (R_0 + \ldots + R_{n-3}) + R_{n-2} \\
R_n &= R_{n-1} + R_{n-2}
\end{aligned}$$

Опростяването следва от равенството $R_{n-1} = R_0 + \ldots + R_{n-3}$, валидно за $n > 2$ (то се получава като заменим n с $n-1$ в рекурентното равенство за R_n).

Следователно редиците R_n и F_n имат еднакви рекурентни равенства за $n > 2$.

Очевидно, след като имаме равенство в двете редици на членове с номера 1 и 2 и изчисляваме следващите членове с еднакви рекурентни равенства, ще получаваме еднакви членове и за номера 3, 4 и т.н.

Формалното доказателство на равенството на всички членове с номера над 1 следва да се извърши с индукция:

Ползваме равенствата $R_1 = F_1 = 1$ и $R_2 = F_2 = 1$ като база за индукция.

От равенствата $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, верни за $n > 2$, следва твърдението:

$$(\forall k\ (n > k > 0) \rightarrow (R_k = F_k)) \rightarrow R_n = F_n$$

Разказано с думи, то изглежда така: Ако за $k = 1, 2 \ldots n-1$ има съвпадение на R_k и F_k, от рекурентните равенства следва, че $R_n = F_n$.

От принципа на пълната индукция следва твърдението на задачата $\forall n\ (n > 0) \rightarrow (R_n = F_n)$.