В домашно № 4 по “Дискретни структури” беше дадена следната задача:

*По колко начина може Дядо Коледа да раздаде 19 различни подаръка на 6 деца така, че всяко дете да получи поне два подаръка?*

Задачата може да се реши чрез принципа за включване и изключване или с помощта на рекурентно уравнение. Съществува и трети начин:

Има 14 случая за разпределението на броя на подаръците между децата:

$\{ 9; 2; 2; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;5} \,.\, C_{19}^{9} \,.\, C_{10}^{2} \,.\, C_{8}^{2} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 62853991200

$\{ 8; 3; 2; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;1;4} \,.\, C_{19}^{8} \,.\, C_{11}^{3} \,.\, C_{8}^{2} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 942809868000

$\{ 7; 4; 2; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;1;4} \,.\, C_{19}^{7} \,.\, C_{12}^{4} \,.\, C_{8}^{2} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 1885619736000

$\{ 7; 3; 3; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;2;3} \,.\, C_{19}^{7} \,.\, C_{12}^{3} \,.\, C_{9}^{3} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 5028319296000

$\{ 6; 5; 2; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;1;4} \,.\, C_{19}^{6} \,.\, C_{13}^{5} \,.\, C_{8}^{2} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 2639867630400

$\{ 6; 4; 3; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;1;1;3} \,.\, C_{19}^{6} \,.\, C_{13}^{4} \,.\, C_{9}^{3} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 17599117536000

$\{ 6; 3; 3; 3; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;3;2} \,.\, C_{19}^{7} \,.\, C_{12}^{3} \,.\, C_{9}^{3} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 11732745024000

$\{ 5; 5; 3; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,2;1;3} \,.\, C_{19}^{5} \,.\, C_{14}^{5} \,.\, C_{9}^{3} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 10559470521600

$\{ 5; 4; 4; 2; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;2;3} \,.\, C_{19}^{5} \,.\, C_{14}^{4} \,.\, C_{10}^{4} \,.\, C_{6}^{2} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 13199338152000

$\{ 5; 4; 3; 3; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;1;2;2} \,.\, C_{19}^{5} \,.\, C_{14}^{4} \,.\, C_{10}^{3} \,.\, C_{7}^{3} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 52797352608000

$\{ 5; 3; 3; 3; 3; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;4;1} \,.\, C_{19}^{5} \,.\, C_{14}^{3} \,.\, C_{11}^{3} \,.\, C_{8}^{3} \,.\, C_{5}^{3} \,.\, C_{2}^{2} =$ 11732745024000

$\{ 4; 4; 4; 3; 2; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,3;1;2} \,.\, C_{19}^{4} \,.\, C_{15}^{4} \,.\, C_{11}^{4} \,.\, C_{7}^{3} \,.\, C_{4}^{2} \,.\, C_{2}^{2} =$ 21998896920000

$\{ 4; 4; 3; 3; 3; 2 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,2;3;1} \,.\, C_{19}^{4} \,.\, C_{15}^{4} \,.\, C_{11}^{3} \,.\, C_{8}^{3} \,.\, C_{5}^{3} \,.\, C_{2}^{2} =$ 29331862560000

$\{ 4; 3; 3; 3; 3; 3 \}$: $\widetilde{P}_6^{\,1;5} \,.\, C_{19}^{4} \,.\, C_{15}^{3} \,.\, C_{12}^{3} \,.\, C_{9}^{3} \,.\, C_{6}^{3} \,.\, C_{3}^{3} =$ 3910915008000

Първият случай например означава, че първото дете е получило 9 подаръка, а останалите деца — по 2 подаръка. Множителите с комбинации съответстват на това, кои подаръци от кое дете са получени: има $C_{19}^{9}$ начина за първото дете да избере 9 подаръка от всички 19; има $C_{10}^{2}$ начина за второто дете да избере 2 подаръка от останалите 10; и т.н. Дотук не сме взели предвид наредбата на децата. Например в първия случай е възможно 9 подаръка да вземе второто или третото дете и т.н. Затова умножаваме още по $\widetilde{P}_6^{\,1;5} = 6$ (броя на пермутациите с повторение, т.е. разместванията на числата 9, 2, 2, 2, 2, 2). Полученото произведение 62 853 991 200 е броят на начините, по които някое от децата (не непременно първото) взима 9 подаръка, а останалите деца — по 2 подаръка.

Събираме произведенията и получаваме отговора 183 421 913 875 200.