Изпит-задачи по Дискретни Структури, КН, II поток, 03.02.2015 г.
Решения на първа част.

Зад. 1 Първокурсниците в някакъв университет са общо 157. За целите на задачата, да допуснем, че има четири мобилни оператора и всеки студент може да е на един или на няколко или на николко от тях. Нека мобилните оператори са $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

Нека 89 студента са на оператор $\mathcal{A}$, 79 са на $\mathcal{B}$, 103 са на $\mathcal{C}$ и 65 са на $\mathcal{D}$. Освен това, нека 9 студента са на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, 55 са на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, 40 са на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, 63 са на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, 26 са на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$, 13 са на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$, 16 са на $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, 54 са на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, 18 са на $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, 30 са на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ и 37 студента са на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

Колко студенти не са на никой от четирите мобилни оператора?

Решение: Нека търсеното количество е x. Съгласно принципа на включването и изключването:

$$x = 157 - (89 + 79 + 103 + 65) + (55 + 63 + 26 + 54 + 30 + 37) - (40 + 13 + 16 + 18) + 9 = 8$$

$\square$

Зад. 2 Колко различни думи (може и да безсмислени) може да съставите от мултимножеството {а, а, б, а, л, щ, л, т, я, б, щ, щ, б, л, я, я, а}$_M$?

Решение: Става дума за пермутации на мултимножество. Отговорът е

$$\frac{17!}{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3!} = 11\,435\,424\,000$$

$\square$

Зад. 3 На един ред в кино седят 40 човека. По колко начина можем да изберем две непресичащи се групи хора измежду тях, да наречем групите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, така че $\mathcal{A}$ да се състои от 8 човека, $\mathcal{B}$ да се състои от 12 човека, и освен това всеки човек от $\mathcal{A}$ да седи вляво от всеки човек от $\mathcal{B}$?

Решение: Трябва да изберем общо $12 + 8 = 20$ човека. След като изберем двадесетте повече нищо не избираме: точно кои ще бъдат в $\mathcal{A}$ и кои, в $\mathcal{B}$ е еднозначно определено. Така че отговорът е

$$\binom{40}{20} = 137\,846\,528\,820$$

$\square$

Зад. 4 Христо работи в магазин за плодове и зеленчуци и трябва да сложи на витрината 32 ябълки и 14 круши в редица. Приемете, че ябълките са неразличими помежду си и крушите са неразличими помежду си, но ябълка и круша се различават.

По колко начина може да се направи това нареждане, така че нито две круши да не са съседни?

Решение: Задачата е същата като задачата, колко са булевите вектори с 32 нули и 14 единици, в които няма съседни единици. Да разгледаме по-общата задача, колко са булевите вектори с n нули и m единици, в които няма съседни единици. Във всеки от тях, всяка единица—може би без последната—има нула вдясно от себе си. Това означава, че $m - 1$ единици биват следвани задължително от нули. Можем да си мислим, че са дадени $m-1$ обекта от вид $\boxed{10}$ и един обект от вид $\boxed{1}$, които са разположени първоначално така:

$$\underbrace{\boxed{10}\ \boxed{10}\ \cdots\ \boxed{10}\ \boxed{1}}_{\text{общо } m \text{ обекта}}$$

и ние трябва да преценим по колко различни начина можем да разположим останалите обекти, това са "несвързаните" нули $\boxed{0}$, в "празнините". "Несвързаните" нули са са $n - (m - 1) = n - m + 1$ на брой.

На свой ред, тази задача е същата като задачата, по колко начина можем да разположим в редица m единици и $n-m+1$ нули. Нейнотото решение е

$$\binom{n-m+1+m}{m} = \binom{n+1}{m}$$

И така, отговорът е

$$\binom{33}{14} = 818\,809\,200$$

□

Зад. 5*, *бонус *Дадено е множество от* 101 *цели числа* $\{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$*, такива че* $1 \leq a_i \leq 200$ *за* $1 \leq i \leq 101$*. Докажете, че измежду тях има поне две* a_i *и* a_j*, такива че* $i \neq j$ *и* a_i *дели* a_j*. Става дума за целочислено делене:* a *дели* b*, ако* $\frac{b}{a}$ *е цяло число, тоест* $b = a \times c$ *за някое цяло* c*.*

Решение: Да разгледаме следните множества:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2^k \times 1 \,|\, k = 1, \ldots, 128\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\} \\
A_3 &= \{2^k \times 3 \,|\, k = 3, \ldots, 192\} = \{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192\} \\
A_5 &= \{2^k \times 5 \,|\, k = 5, \ldots, 160\} = \{5, 10, 20, 40, 80, 160\} \\
A_7 &= \{2^k \times 7 \,|\, k = 7, \ldots, 112\} = \{7, 14, 28, 56, 112\} \\
&\cdots \\
A_{199} &= \{2^k \times 199 \,|\, k = 199\} = \{199\}
\end{aligned}$$

Обединението им е точно $\{1, 2, \ldots, 200\}$, понеже всяко цяло положително е произведение от степен на двойката и нечетно. За всяко от тези множества, k взема всички възможни стойности, така че $2^k \times m$ да не надхвърли 200, където m е съответното нечетно. Множествата са точно 100 на брой, защото в затворения интервал $[m_1, \ldots, m_2]$, където m_1 и m_2 са нечетни и $m_1 \leq m_2$, има точно $\frac{m_2 - m_1}{2} + 1$ нечетни числа. В случая, $\frac{199-1}{2} + 1 = 100$.

Ако тези множества се чекмеджета, а числата от $\{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ са ябълките, по принципа на Дирихле поне две ябълки са в едно чекмедже. Тоест, поне две числа измежду дадените са такива, че са произведение от степени на двойката (различни) и **едно и също нечетно число**. Тривиално се показва, че едно от тези две числа дели другото. □