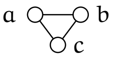
Изпит-задачи по Дискретни Структури, КН, II поток, 03.02.2015 г.
Решения на втора част.

Зад. 1 Първо малко пояснения. В тази задача се иска да намерите броя на циклите в някакъв граф. Като казваме *цикъл* имаме предвид прост цикъл. Освен това правим разлика между *цикъл като подграф* и *цикъл като поредица от върхове* (тук изпускаме ребрата, защото говорим за прости графи). Дефиницията на "цикъл" в час беше "Поредица от върхове, такава че ...". Забележете, че множество такива различни поредици може да описват един и същи цикъл в смисъл на подграф. Примерно, ако върховете са a, b и c, следните шест поредици:

$$abc \qquad acb \qquad bac \qquad bca \qquad cab \qquad cba$$

описват **един и същи подграф**, а именно този: 

. И така, когато търсим броя на циклите, имаме предвид подграфи. Примерно, в K_2 няма цикли, а K_3 има точно един цикъл. Припомняме си, че K_n означава пълния граф на n върха.

Задачата е следната.

- Колко цикъла има в K_4?
- Колко цикъла има в K_6?

Решение: Простите цикли имат поне три върха. Всеки цикъл с n върха има точно $2n$ различни представяния—поредици (пермутации) от върхове. Следователно, при избрани n участващи върха, има точно $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ цикъла: тъй като става дума за пълен граф, има ребро между всеки два върха.

За K_4 отговорът е:

$$\frac{2!}{2} \cdot \binom{4}{3} + \frac{3!}{2} \cdot \binom{4}{4} = 7$$

$\binom{4}{3}$ и $\binom{4}{4}$ са съответно броят на начините да изберем 3 и 4 върха от 4, а $\frac{2!}{2}$ и $\frac{3!}{2}$ са броевете различните цикли, които можем да построим от избраните върхове.

За K_6 отворът е, с напълно аналогични разсъждения:

$$\frac{2!}{2} \cdot \binom{6}{3} + \frac{3!}{2} \cdot \binom{6}{4} + \frac{4!}{2} \cdot \binom{6}{5} + \frac{5!}{2} \cdot \binom{6}{6} = 197$$

□

Зад. 2 Нека $\mathcal{S}$ е множеството от всички крайни свързани графи, нито два от които не са изоморфни. Удобно е да мислим, че върховете нямат имена. За да се уверите, че разбирате добре $\mathcal{S}$, проверете, че то съдържа точно два графа с три върха и точно шест графа с четири върха.

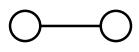
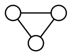
Разгледайте релацията $R \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, дефинирана така:

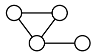
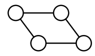
$$\forall G_1 \in \mathcal{S} \ \ \forall G_2 \in \mathcal{S} : (G_1, G_2) \in R \leftrightarrow \ (|V_1| < |V_2| \text{ или } (|V_1| = |V_2| \text{ и } |E_1| \leq |E_2|)),$$

$$\text{където } V_i \text{ е множеството от върховете на } G_i, \text{ а } E_i \text{ е множеството от ребрата на } G_i, \text{ за } i \in \{1, 2\}.$$

Определете дали

- R е релация на еквивалентност.
- R е релация на частична наредба

Решение: R не е релация на еквивалентност, защото не е симетрична. Примерно, ако G_1 е следният граф:  и G_2 е следният граф:  , то е вярно, че $(G_1, G_2) \in R$, но не е вярно, че $(G_2, G_1) \in R$.

R не е релация на частична наредба. Нека H_1 е следният граф:  и H_2 е следният граф:  . Тогава $(H_1, H_2) \in R$ и $(H_2, H_1) \in R$, понеже имат по 4 върха и 4 ребра, но тези графи очевидно не са изоморфни. Следователно, релацията има контур, а ние знаем, че релациите на частична наредба нямат контури. □

Зад. 3 За някакво множество от графи $\mathcal{T}$ е известно, че $\forall G \in \mathcal{T} : |E| \leq 3|V| - 6$, където V е множеството от върховете на G, а E е множеството от ребрата на G. Докажете, че всеки граф от $\mathcal{T}$ има връх от степен, не по-голяма от 5.

Решение: Да допуснем противното. Нека $G(V, E) \in \mathcal{T}$ е такъв, че всеки връх в $\mathcal{T}$ има степен поне 6. Тогава $\sum_{u \in V} d(u) \geq 6|V|$. Съгласно изведено на лекция равенство, $\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$. Тогава $2|E| \geq 6|V| \leftrightarrow |E| \geq 3|V|$, в противоречие с условието, че $|E| \leq 3|V| - 6$. □

Зад. 4 Намерете полинома на Жегалкин на функциите

- $f(x, y) = (1101)$.
- $g(x, y, u, v, w) = (11011101110111011101110111011101)$.

Решение: В час изведохме, че $f(x, y) = 1 + x + xy$. Лесно се вижда, че в g променливите x, y и u са фиктивни. Тогава $g(x, y, u, v, w) = 1 + v + vw$. □

Зад. 5**, **бонус Оцветяване на граф $G(V, E)$ се нарича всяка функция $f : V \to C$, такава че $\forall (u, v) \in E : f(u) \neq f(v)$. C е множество, чиито елементи се наричат *цветове*. G е k-*оцветим*, ако съществува оцветяване на G с не повече от k цвята.

Докажете, че за всеки граф G е вярно следното: G е $(k+1)$-оцветим, където k е максималната степен на връх в G.

Решение: С индукция по n. Базата е $n = 1$. Има само един граф с един връх (с точност до изоморфизъм), той няма ребра, максималната степен на връх в него е 0 и наистина той е $(0+1)$-оцветим.

Да допуснем, че твърдението е вярно за всеки граф с n върха. Да радгледаме произволен граф G с $n+1$ върха. Нека u е произволен връх от максимална степен в G. Нека степента на u в G е k. Нека множеството от съседите на u в G се нарича W. Очевидно G се получава от някой граф H с добавяне на върха u и свързването му с ребра към всички върхове от W. Забележете, че максималната степен на връх в H не може да е повече от k, така че по индуктивното предположение, H е $(k+1)$-оцветим. Тъй като $|W| = k$, върховете от W са оцветени в най-много k различни цвята. Сега добавяме u към H и свързваме u с по едно ребро към всеки връх от W, получавайки G. Оцветяваме върха u в цвят, който не се ползва от никой връх от W. Показахме, че G е $(k+1)$-оцветим. □