Писмен изпит по ДС за КН, 1-ви поток, 13. 02. 2015 г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. Нека $n \in N^+$ и $U = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Да се докаже, че за всяко множество $A \subset U$, за което $|A| = n + 1$, съществува $k \in U,\ k < 2n$, такова че $k \in A$ и $(k + 1) \in A$.

Задача 2. Точките от една окръжност са оцветени в два цвята. Докажете, че съществува равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове, лежащи на окръжността.

Упътване: Впишете правилен петоъгълник в окръжността и разсъждавайте за цветовете на върховете му.

Задача 3. Нека $G(V, E)$ е краен неориентиран граф и $v \in V$ е негов срязващ връх (след отстраняването на v и ребрата, инцидентни с него, броят на свързаните компоненти на G се увеличава). Нека G_1 е графът, получен от G чрез отстраняване на v и ребрата, инцидентни с него. Докажете, че допълнителният граф на G_1 е свързан.

Задача 4. Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция
$f(x, y, z) = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$.

Задача 5. Докажете, че съвършената ДНФ на двоичната функция
$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ е единственото представяне на тази функция чрез ДНФ.

Задача 6. Да се намерят всички минимални дизюнктивни нормални форми
на двоичната функция $f(x, y, z)$, определена с таблицата:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

РЕШЕНИЯ

Задача 6. Таблицата на f изглежда така:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Построяваме елементарните конюнкции съгласно с теоремата на Бул и ги поставяме в първата колона на таблицата на импликантите по-долу.

Пресмятаме всички импликанти и отбелязваме със $*$ погълнатите импликанти:

I_3	I_2
$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,*$	$\overline{x}\,\overline{y}$
$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,*$	$\overline{x}\,\overline{z}$
$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,*$	$\overline{y}\,z$
$x\,\overline{y}\,z\,*$	$y\,\overline{z}$
$x\,y\,\overline{z}\,*$	

Сега строим таблица, в която отбелязваме коя проста импликанта коя единица на f покрива:

N_f	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$	$y\,\overline{z}$
000	$*$	$*$		
001	$*$		$*$	
010		$*$		$*$
101			$*$	
110				$*$

Единиците 101 и 110 са покрити от единствените импликанти $\overline{y}\,z$ и $y\,\overline{z}$, следователно те са задължителни.

Те двете не покриват единствено единицата 000, можем да я покрием с коя да е от импликантите $\overline{x}\,\overline{y}$ и $\overline{x}\,\overline{z}$. Те са с еднакъв брой букви, следователно има две минимални ДНФ:

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} \;\vee\; \overline{y}\,z \;\vee\; y\,\overline{z}\,,$$
$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{z} \;\vee\; \overline{y}\,z \;\vee\; y\,\overline{z}\,.$$

Задача 5. Тъй като от всички ДНФ на дадена двоична функция съвършената ДНФ има най-голяма сложност (т.е. съдържа най-много променливи, всяка броена толкова пъти, колкото пъти участва), а всяка минимална ДНФ по определение е с минимална сложност, то твърдението на задачата е равносилно на твърдението, че съвършената ДНФ на дадената двоична функция е същевременно минимална ДНФ, и то единствената минимална ДНФ. Тоест трябва да докажем, че съвършената ДНФ на функцията f не може да се опрости. За целта прилагаме метода на Куайн—Маккласки.

По определението за изключваща дизюнкция съвършената ДНФ на двоичната функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ съдържа тези и само тези елементарни конюнкции, в които нечетен брой променливи (точно една или точно три, или точно пет и т.н.) участват без отрицание. Всяка елементарна конюнкция е импликанта. Остава да докажем, че всички тези импликанти са прости (неприводими).

Да допуснем противното: че някои две от елементарните конюнкции на f могат да бъдат съчетани така, че от тях да се получи импликанта с по-малко от n множителя. Следователно тези две елементарни конюнкции се различават по местата на отрицанията само при една променлива, т.е. само една променлива участва в двете елементарни конюнкции по различен начин: в едната конюнкция със отрицание, а в другата — без отрицание. Тогава броят на променливите без отрицание в едната елементарна конюнкция на f е четен, а в другата — нечетен. Значи съвършената ДНФ на функцията f съдържа елементарна конюнкция с четен брой променливи без отрицание, което противоречи на установеното по-горе.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Следователно вярно е обратното: всички елементарни конюнкции на f са прости (неприводими), значи съвършената ДНФ не може да се опрости повече, т.е. тя е минимална ДНФ, и то единствената минимална ДНФ, а значи и единствената ДНФ изобщо.

Задача 4. Съвършената ДНФ на булевата функция $f = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$ може да бъде намерена по два начина: чрез преобразуване на дадената формула или чрез построяване на таблицата на дадената функция f. Тук ще използваме таблица.

x	y	z	$x \to y$	$x \oplus z$	$f = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Единиците означават логическата стойност истина (true), а нулите — неистина (false).

От втория, четвъртия и седмия ред на таблицата получаваме съвършената ДНФ на f:

$\boxed{f = \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z}}$.

Полиномът на Жегалкин също може да се намери по два начина: чрез преработване на получената съвършена ДНФ или чрез преработване на формулата, дадена в условието. И двата начина са верни, но по-лесен е вторият.

И така, $f=(x\to y)\wedge(x\oplus z)$ по условие. Заменяме импликацията: $x\to y=\overline{x}\vee y$, а дизюнкцията — по един от законите на Август де Морган: $\overline{x}\vee y=\overline{x\,\overline{y}}$. Както е прието при работа с полиномите на Жегалкин, пишем + вместо $\oplus$ и точка вместо $\wedge$ (или без знак).

Получаваме $f=\left(\overline{x\,\overline{y}}\right).(x+z)$. Заместваме отрицанието по формулата $\overline{x}=x+1$. Следователно $f=\big(x.(y+1)+1\big).(x+z)$. Разкриваме скобите и опростяваме получения израз чрез законите за поглъщане: $x\,x=x$ и $x+x=0$.

$$f=x\,x(y+1)+x(y+1)z+x+z=x(y+1)+x(y+1)z+x+z\,,$$

$$f=x\,y+\cancel{x}+x\,y\,z+x\,z+\cancel{x}+z=x\,y\,z+x\,y+x\,z+z\,.$$

Окончателно, $\boxed{f=x\,y\,z+x\,y+x\,z+z}$ е полиномът на Жегалкин на функцията f.

Задача 3. След изтриването на срязващия връх броят на компонентите на свързаност се увеличава. Понеже всеки граф (в това число G) има поне една такава компонента, то следва, че графът G_1 има поне две компоненти на свързаност.

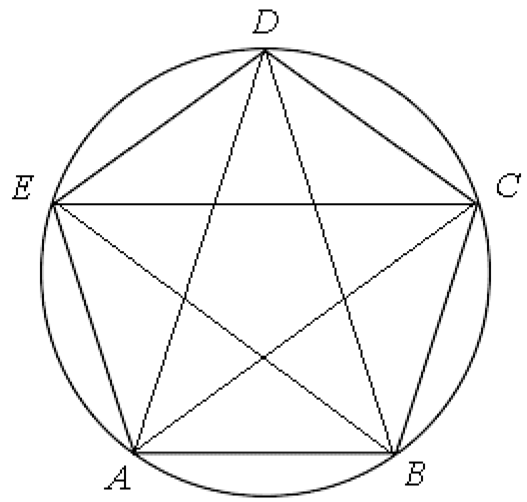
За да докажем, че допълнителният граф $\overline{G_1}$ е свързан, ще използваме определението за свързан граф: ще докажем, че между всеки два върха x и y на $\overline{G_1}$ има път. Взимаме два различни върха x и y на графа $\overline{G_1}$; те са върхове и на графа G_1.

Първи случай: Върховете x и y са от различни компоненти на свързаност на G_1. Следователно в графа G_1 няма път от x до y. В частност, графът G_1 не съдържа ребро между x и y. По определение допълнителният граф $\overline{G_1}$ съдържа ребро между x и y; това ребро представлява път (с дължина 1) между x и y.

Втори случай: Върховете x и y са от една и съща компонента на свързаност на G_1. По-горе видяхме, че G_1 има поне две компоненти на свързаност. Нека z е връх на G_1 от някоя друга компонента на свързаност на G_1 (различна от компонентата, съдържаща върховете x и y). Следователно G_1 не съдържа път от x до z, нито от y до z. В частност, G_1 не съдържа ребро между x и z, нито между y и z. Тогава $\overline{G_1}$ съдържа тези две ребра, а значи съдържа и път (с дължина 2) между x и y, а именно: $x-z-y$.

Задача 1. Решението се получава чрез принципа на Дирихле. Разглеждаме множествата $\{1\,;2\}$, $\{3\,;4\}$, $\{5\,;6\}$, $\ldots$, $\{2n–1\,;2n\}$ като чекмеджета; те са точно n на брой. Разглеждаме елементите на множеството A като предмети (n+1 на брой). Поставяме всеки предмет в съответното му чекмедже (т.е. в множеството, на което принадлежи). Понеже предметите са повече от чекмеджетата, то има поне едно чекмедже $\{k\,;k+1\}$, съдържащо два предмета. Щом k и k+1 са предмети, то $k\in A$ и $k+1\in A$. А щом $\{k\,;k+1\}$ е чекмедже, то $k\in U=\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ и $k+1\le 2n$, т.е. $k\le 2n-1<2n$, т.е. $k<2n$.

Задача 2. В дадената окръжност вписваме правилен петоъгълник $ABCDE$.



Прилагаме принципа на Дирихле: цветовете са чекмеджета (две на брой), а върховете са предмети (пет на брой). Тъй като 5 **:** 2 = 2 остатък 1, то следва, че поне три от върховете на петоъгълника са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрения триъгълник с едноцветни върхове, чието съществуване трябваше да докажем.

Причината е, че всеки три върха на правилен петоъгълник образуват равнобедрен триъгълник. Това се доказва така:

От върховете на петоъгълника се образуват $C_5^3 = 10$ триъгълника.

Пет от тях — $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ — съдържат по две страни на петоъгълника. Тези пет триъгълника са равнобедрени, тъй като всеки две страни на правилния петоъгълник са равни (например за $\triangle ABC$ имаме $AB = BC$).

Останалите пет триъгълника — $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle CDA$, $\triangle DEB$, $\triangle EAC$ — съдържат по два диагонала на петоъгълника и също са равнобедрени, защото всеки два диагонала на правилния петоъгълник са равни (например за $\triangle ABD$ имаме $AD = DB$).

И така, които и три върха на правилен петоъгълник да вземем, те ще образуват равнобедрен триъгълник. Всеки от петте върха е оцветен в един от два възможни цвята, затова поне три върха са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове.