ЗАБЕЛЕЖКИ И АЛТЕРНАТИВНИ РЕШЕНИЯ
НА НЯКОИ ОТ ЗАДАЧИТЕ ОТ ИЗПИТА ПО “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”
НА 13. 02. 2015 ГОД.

При проверката на решенията, поради голямото разнообразие от подходи, предложени от студентите, възникнаха някои въпроси, които се нуждаят от коментар: забележки относно някои начини за решаване, различни “тънки” моменти в някои задачи, трикове за улеснение на тромави етапи от решение, логически грешки, алтернативни решения.

Затова тук ще коментираме две от задачите, чиито решения съдържат нещо, което си заслужава да бъде разяснено.

Задача. Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x,y,z)=(x\rightarrow y)\wedge(x\oplus z)$.

Решение: Първата част — намирането на съвършената ДНФ — не се нуждае от особен коментар: съставяме таблицата на функцията f, след което прилагаме теоремата на Бул. Получава се следната съвършена дизюнктивна нормална форма (ДНФ):

$$f(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,z\;\vee\;\overline{x}\,y\,z\;\vee\;x\,y\,\overline{z}$$

(за подробностите вж. публикуваното решение).

По-интересна е втората част — намирането на полинома на Жегалкин. Възможни са два подхода: да преобразуваме оригиналния израз (т.е. израза, даден в условието) или да преобразуваме получената съвършена ДНФ. В публикуваното решение е използван първият подход. Тук ще използваме втория.

Разбира се, има стандартен начин за превръщане на ДНФ в полином на Жегалкин: първо свеждаме дизюнкцията до конюнкция и отрицание с помощта на един от законите на Август де Морган: $p_1\vee p_2\vee p_3\vee\ldots\vee p_n\;=\;\overline{\overline{p_1}\cdot\overline{p_2}\cdot\overline{p_3}\cdots\overline{p_n}}$; после изразяваме отрицанието чрез изключваща дизюнкция и константата 1 (логическата истина): $\overline{p}=p\oplus 1$. (Както обикновено, пишем + вместо $\oplus$ при работа с полиноми на Жегалкин.) И така,

$$f(x,y,z)\;=\;\overline{\overline{\overline{x}\,\overline{y}\,z}\;.\;\overline{\overline{x}\,y\,z}\;.\;\overline{x\,y\,\overline{z}}}=\big[(x+1)(y+1)z+1\big]\big[(x+1)yz+1\big]\big[xy(z+1)+1\big]+1$$

$$f(x,y,z)\;=\;\big[xyz+xz+yz+z+1\big]\big[xyz+yz+1\big]\big[xyz+xy+1\big]+1\,.$$

Разкриваме скобите и опростяваме израза чрез законите за поглъщане:
$pp=p$, затова не пишем степени, по-високи от първа;
$p+p=0$, т.е. еднаквите събираеми се унищожават по двойки.

$$f=\Big[\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{yz}+\cancel{yz}+\cancel{yz}+\cancel{xyz}+xz+\cancel{yz}+z+1\Big]\,.$$

$$\big[xyz+xy+1\big]+1\;=\;\big[xz+z+1\big]\,.\big[xyz+xy+1\big]+1\;=$$

$$=\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+\cancel{xyz}+xyz+xy+xz+z+\cancel{1}+\cancel{1}=xyz+xy+xz+z.$$

Следователно полиномът на Жегалкин е $\boxed{f(x,y,z)=xyz+xy+xz+z}$. Разбира се, този отговор съвпада с отговора от публикуваното решение, но начинът на получаването е друг.

Можем да опростим сметките в горното решение, ако се възползваме от следния трик:

в съвършена ДНФ имаме право да заменяме включващата дизюнкция с изключваща!

Тоест в сила е формулата $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n \;=\; p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \dots \oplus p_n$.

В общия случай (когато дизюнктивната нормална форма не е съвършена), нямаме право да заменяме включващата дизюнкция с изключваща! Причината е, че тези две логически операции по принцип не съвпадат: включващата дизюнкция е истинна точно тогава, когато поне един от операндите е истинен; докато изключващата дизюнкция е истинна точно тогава, когато нечетен брой от операндите са истинни.

Защо **при съвършените ДНФ имаме право да прилагаме описаната замяна**? Защото всяка съвършена ДНФ се състои от елементарни конюнкции, а никои две такива конюнкции не могат да бъдат верни едновременно. (Например $\overline{x}\,\overline{y}\,z$ и $\overline{x}\,y\,z$ не могат да бъдат верни едновременно, защото y не може да бъде едновременно и вярно, и невярно.) С други думи, от всички елементарни конюнкции в дадена съвършена ДНФ в който и да е момент е вярна най-много една, т.е. точно една или нито една. В първия случай двете дизюнкции (включващата и изключващата) имат стойност истина, а във втория случай — неистина; следователно във всички възможни случаи те имат една и съща стойност. (Те биха се различавали, ако например две или четири от елементарните конюнкции бяха истинни, но това, както вече обяснихме, е невъзможно.)

С помощта на показания трик е много по-лесно да стигнем от съвършена ДНФ до полином на Жегалкин. В дадената изпитна задача това става така:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \overline{x}\,\overline{y}\,z \;\vee\; \overline{x}\,y\,z \;\vee\; x\,y\,\overline{z} \;=\; \overline{x}\,\overline{y}\,z \;\oplus\; \overline{x}\,y\,z \;\oplus\; x\,y\,\overline{z} \;= \\
&= (x+1)(y+1)z + (x+1)yz + xy(z+1) = \\
&= \cancel{xyz} + xz + \cancel{yz} + z + \cancel{xyz} + \cancel{yz} + xyz + xy = \\
&= xyz + xy + xz + z,
\end{aligned}
$$

което е същият отговор като получения по-рано, но сега преобразуванията са по-прости: **не използваме закона на Август де Морган, поради което няма нужда да обработваме произведения с вложени скоби.**

Задача. Нека $n \in \mathbb{N}^{+}$ и $U = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n \,\}$. Да се докаже, че за всяко множество $A \subset U$, за което $|\,A\,| = n+1$, съществува $k \in U$, $k < 2n$, такова, че $k \in A$ и $(k+1) \in A$.

Решение: Публикуваното по-рано решение се основава на принципа на Дирихле. Възможни са и други (правилни) подходи, а има и погрешни начини за “решаване” на тази задача, които само привидно са правилни, а в действителност съдържат логическа грешка.

Ще изложим два други (правилни) начина за решаване на задачата и след всеки от тях ще коментираме някои от възможните логически грешки.

Втори начин: <u>чрез неравенства</u>. Нека $A = \{\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_{n+1} \,\}$, където числата от множеството A са номерирани във възходящ ред: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n+1}$. Трябва да докажем, че поне две последователни от тях (с поредни индекси) са поредни и като стойности $(k$ и $k{+}1)$.

Допускаме противното — че разликата на всеки две от тях е по-голяма от 1 (т.е. поне 2): $a_2 - a_1 \geq 2,\ \ a_3 - a_2 \geq 2,\ \ a_4 - a_3 \geq 2,\ \ \ldots\ ,\ \ a_{n+1} - a_n \geq 2$. Събираме неравенствата (общо n на брой). В лявата страна всяко число (с изключение на първото и последното) участва два пъти — веднъж с плюс, веднъж с минус. Затова се унищожават всички числа без първото и последното. В дясната страна имаме сбор от n на брой двойки, т .е. $2n$. Получава се неравенството $\boxed{a_{n+1} - a_1 \geq 2n}$. (По-неформално: най-голямото и най-малкото число от A образуват интервал, който останалите $n{-}1$ числа делят на n части; а щом дължината на всяка част е поне 2, то дължината на целия интервал е поне $2n$.)

От друга страна, числата от A принадлежат и на U, защото $A \subset U$. Следователно $a_{n+1} \leq 2n,\ \ a_1 \geq 1$, откъдето $a_{n+1} - a_1 \leq 2n - 1 < 2n$, т.е. $\boxed{a_{n+1} - a_1 < 2n}$, което противоречи на неравенството $a_{n+1} - a_1 \geq 2n$, доказано по-горе.

<u>Заб.</u> Същата идея може да се осъществи по различен начин: противоречието може да се "придвижи" до произволно място от разсъжденията. Например нека $m = |A|$ е броят на елементите на множеството A. (По условие $m = n + 1$.) Сега имаме $m - 1$ неравенства, които след събиране дават неравенството $a_m - a_1 \geq 2(m-1)$, а от друга страна, от $A \subset U$ следва, че $a_m - a_1 \leq 2n - 1$. Следователно $2(m-1) \leq a_m - a_1 \leq 2n - 1$, откъдето $2m - 2 \leq 2n - 1 < 2n$, т.е. $2m - 2 < 2n$, значи $m - 1 < n$, т.е. $m < n + 1$ в противоречие с даденото по условие (че $m = n + 1$).

Често срещана **грешка** при този начин е опитът за доказателство чрез твърдение, което самò се нуждае от доказване или пък е невярно.

П р и м е р : "Най-лошият случай е, когато n от елементите на множеството A са разположени през едно число, т.е. когато те са всички четни или всички нечетни числа от множеството U: $\{1,\ 3,\ 5\ ,\ \ldots\ ,\ 2n-1\}$ или $\{2,\ 4,\ 6\ ,\ \ldots\ ,\ 2n\}$. Както и да добавим $(n{+}1)$-во число към тях, A вече ще съдържа две последователни цели числа."

Последното изречение изказва вярно твърдение, но това е само частен случай. Първото изречение изказва твърдение, което не е ясно. (Какво значи "най-лош случай"?) Ако преформулираме първото изречение така: "Има само два начина да изберем n числа от множеството U така, че между тях да няма последователни, а именно следните начини: $\{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ ,\ 2n-1\}$ или $\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ ,\ 2n\}$.", то сега твърдението става ясно, но невярно: това не са единствените начини, има и други, например $\{1,\ 4,\ 6,\ \ldots\ ,\ 2n\}$.

Друга **грешка** при този начин на решаване е твърдението на задачата да се "докаже" чрез равносилно твърдение. Тази грешка е известна като **кръгово доказателство**.

П р и м е р : "Да допуснем противното: че множеството A не съдържа последователни числа. [... *следват разни разсъждения*...] Тъй като A не съдържа последователни числа, то броят на елементите на A е не повече от половината от броя на елементите на U, тоест не повече от n, което противоречи на даденото, че $|A| = n + 1$."

Всички твърдения в това "решение" са верни, но то е преразказ, а не доказателство!

Трети начин: чрез математическа индукция. В задачата има твърде много латински букви, затова ще я преформулираме така, че да остане само n (защото именно по n ще проведем индукцията):

Да се докаже, че както и да изберем $n+1$ числа от множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n\}$, сред тях непременно ще има поне две последователни (т.е. с разлика 1).

База: При $n = 1$: Единственият начин да изберем $1+1 = 2$ (две) числа от множеството $\{1,\ 2\}$ е да вземем и 1, и 2, а те са последователни.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че сме доказали, че както и да изберем n числа от множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n-2\}$, сред тях непременно има поне две последователни. Въз основа на това предположение ще докажем, че както и да изберем $n+1$ числа от множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n\}$, сред тях непременно ще има поне две последователни.

Първи случай: Сред избраните $n+1$ числа е както числото $2n$, така и числото $2n-1$. Тъй като те са последователни, то индуктивното заключение е вярно.

Втори случай: Поне едно от числата $2n$ и $2n-1$ не присъства сред избраните, т.е. от числата $2n$ и $2n-1$ е избрано най-много едно. Понеже избраните числа са общо $n+1$ на брой, то от множеството $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n-2\}$ са избрани поне n на брой числа. Въз основа на индуктивното предположение можем да твърдим, че между тях има поне две последователни. Значи индуктивното заключение е вярно и в този случай.

Има множество неуспешни опити за решаване на задачата по метода на математическата индукция. Често срещани **грешки** при този начин са следните:

— Неумело боравене с обозначенията. Множеството A от индуктивното заключение не е същото като множеството A от индуктивното предположение: второто множество се получава от първото чрез изключване на числата $2n$ и $2n-1$ (вж. решението по-горе). Различни са и числата k. Причината е, че колкото и да са сходни, индуктивното предположение и индуктивното заключение са различни твърдения.

— Решение, при което индуктивното предположение не се използва в доказателството на индуктивното заключение, не може да бъде наречено математическа индукция.

— Формулировките на индуктивното предположение и индуктивното заключение сами по себе си не съставляват индуктивната стъпка. Същината на индуктивната стъпка е извеждането на индуктивното заключение от индуктивното предположение. Без такъв извод индукцията по същество не е проведена.

— В някои изпитни работи има опити за провеждане на индукция по k. При все че математическа индукция може да се провежда по всеки параметър, приемащ за стойности естествени числа, все пак има едно важно ограничение: параметърът, по който се провежда индукцията, участва винаги в квантор за всеобщност (а не за съществуване). В конкретната задача се твърди наличието на определено свойство за всяко n, но за k само се твърди, че съществува. (По-неформално казано: n е дадено, а k се търси.) Ето защо в тази задача е невъзможно да се проведе математическа индукция по k.