Домашно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2015г.

---

# ТЕМА: МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА. ИНДУКЦИЯ РЕШЕНИЯ

---

| **Задача** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** *бонус* | **Макс.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *получени точки* | | | | | | | |
| *от максимално* | 12 | 20 | 12 | 10 | 18 | 15 | 72 |

**Задача 1:** (12т.) Дадени са множеството $A = \{a, b\}$ и числото $n \in \mathbb{N}^+$.

1. Напишете в явен вид всяко множество:

   а) (2т.) $\{A, A^2\}$

   Решение:

   $\{A, A^2\} = \{\{a, b\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}\}$

   б) (2т.) $A \cup A^2 \cup A^3$

   Решение:

   $A \cup A^2 \cup A^3 = \{a, b, (a, a), (a, b), (b, a), (b, b),$

   $(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$

   в) (2т.) $2^{A^2} \cup \{\emptyset, A, A^2\}$

   Решение:

   $2^{A^2} \cup \{\emptyset, A, A^2\} = \{\emptyset, \{(a, a)\}, \{(a, b)\}, \{(b, a)\}, \{(b, b)\},$

   $\{(a, a), (a, b)\}, \{(a, a), (b, a)\}, \{(a, a), (b, b)\},$

   $\{(a, b), (b, a)\}, \{(a, b), (b, b)\}, \{(b, a), (b, b)\},$

   $\{(a, a), (a, b), (b, a)\}, \{(a, a), (a, b), (b, b)\},$

   $\{(a, a), (b, a), (b, b)\}, \{(a, b), (b, a), (b, b)\},$

   $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}, \{a, b\}\}$

2. Определете броя на елементите на всяко от следващите три множества:

   а) (2т.) $\{A, A^2, ..., A^n\}$

   Решение:

   $|\{A, A^2, ..., A^n\}| = n$

   б) (2т.) $A \cup A^2 \cup ... \cup A^n$

   Решение:

   $|A \cup A^2 \cup ... \cup A^n| = 2 + 2^2 + ... + 2^n$

   в) (2т.) $2^{A^n} \cup \{\emptyset, A, A^2, ..., A^n\}$

   Решение:

   $|2^{A^n} \cup \{\emptyset, A, A^2, ..., A^n\}| = |2^{A^n}| + |\{\emptyset, A, A^2, ..., A^n\}| - |2^{A^n} \cap \{\emptyset, A, A^2, ..., A^n\}| = 2^{2^n} + (n+1) - 2 = 2^{2^n} + n - 1$

**Задача 2:** (20т.) Докажете (чрез таблица и чрез разсъждения) или опровергайте (чрез таблица и чрез контрапример), че $\forall A, B, C \subseteq U$:

а) (10т.) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Решение: Доказателство, че твърдението не е вярно:

**Вариант 1 (табличен метод):**

| A | B | C | $A \setminus B$ | $(A \setminus B) \setminus C$ | $B \setminus C$ | $A \setminus (B \setminus C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Заключение:* За $(1, 0, 1)$ съответните стойности 0 и 1 в колоните $(A \setminus B) \setminus C$ и $A \setminus (B \setminus C)$ са различни. Следователно, $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

**Вариант 2 (чрез контрапример):** Нека $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{2, 4\}$. Тогава: $(A \setminus B) \setminus C = \{1\} \neq A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2\}$

б) (10т.) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Решение: Доказателство, че твърдението е вярно:

**Вариант 1 (табличен метод):**

| A | B | C | $A \setminus B$ | $(A \setminus B) \setminus C$ | $B \cup C$ | $A \setminus (B \cup C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

*Заключение:* За всяка от осемте възможности съответните стойности в колоните $(A \setminus B) \setminus C$ и $A \setminus (B \cup C)$ съвпадат. Следователно, $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

**Вариант 2:** Доказателство, че $\forall x(x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C)$:

$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C)) \Leftrightarrow$

$(x \in A) \wedge (x \in (\overline{B \cup C})) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (\overline{B} \cap \overline{C})) \Leftrightarrow$

$(x \in A) \wedge ((x \in \overline{B}) \cap (x \in \overline{C})) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow$

$((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$

**Задача 3:** (12т.) Нека $A, B_1, B_2, ..., B_n; n > 0$ са произволни множества. Докажете, че е вярно следното:

$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

Решение: $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \;\Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_i \;\Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \notin (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) \;\Leftrightarrow$

$x \in A \wedge (x \notin B_1 \wedge x \notin B_2 \wedge ... \wedge x \notin B_n) \;\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge x \notin B_1) \wedge (x \in A \wedge x \notin B_2) \wedge ... \wedge (x \in A \wedge x \notin B_n) \;\Leftrightarrow$

$(x \in A \setminus B_1) \wedge (x \in A \setminus B_2) \wedge ... \wedge (x \in A \setminus B_n) \;\Leftrightarrow$

$x \in (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2) \cap ... \cap (A \setminus B_n) \;\Leftrightarrow$

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

**Задача 4:** (10т.) Използвайте таблица на истинност за да докажете следните еквивалентности:

$p \to (q \vee r) \Leftrightarrow \neg r \to (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to r$

Решение:

| | | | | (1) | | | (2) | | (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | r | $q \vee r$ | $p \to (q \vee r)$ | $\neg r$ | $p \to q$ | $\neg r \to (p \to q)$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \wedge \neg q) \to r$ |
| F | F | F | F | T | T | T | T | F | T |
| F | F | T | T | T | F | T | T | F | T |
| F | T | F | T | T | T | T | T | F | T |
| F | T | T | T | T | F | T | T | F | T |
| T | F | F | F | F | T | F | F | T | F |
| T | F | T | T | T | F | F | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | T | T | F | T |
| T | T | T | T | T | F | T | T | F | T |

*Заключение:* Трите израза са еквивалентни, защото колони (1), (2) и (3) съвпадат.

**Задача 5:** (18т.) Дадена е следната дефиниция:

а) (9т.) Елементът $x$ принадлежи на симетричната разлика на множествата $A$ и $B$ тогава и само тогава, когато $x$ принадлежи на точно едно от двете множества.

Дефинирайте кога един елемент не принадлежи на симетричната разлика на две множества. Запишете двете дефиниции на езика на предикатната логика.

Решение:
$\forall x(x \in A \triangle B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B)$

Елементът $x$ не принадлежи на симетричната разлика на множествата $A$ и $B$ тогава и само тогава, когато $x$ едновременно принадлежи или не принадлежи на двете множества.
$\forall x(x \notin A \triangle B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \vee x \notin A \wedge x \notin B)$

б) (9т.) Множеството $A$ е подмножество на множеството $B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент на $A$ е елемент на $B$.

Дефинирайте кога едно множество не е подмножество на друго. Запишете двете дефиниции на езика на предикатната логика.

Решение:
$\forall A \forall B(A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B))$

Множеството $A$ не е подмножество на множеството $B$ тогава и само тогава, когато съществува елемент на $A$, който не е елемент на $B$.
$\forall A \forall B(A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B))$

**Задача 6:** (15т.) Докажете по индукция, че за всяко естествено число n е в сила следното твърдение: *всяко множество с n елемента има* $2^n$ *подмножества.*

Решение: Нека $P(n)$ : *всяко множество с* $n$ *елемента има* $2^n$ *подмножества.*

1. Доказателство, че е вярно $P(0)$ : *всяко множество с* $0$ *елемента има* $2^0$ *подмножества*:

   Всяко множество с 0 елемента е празното множество, което има $|2^{\emptyset}| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$ подмножества.

2. Допускаме, че за някакво естествено число $k \geq 0$ е вярно $P(k)$ : *всяко множество с* $k$ *елемента има* $2^k$ *подмножества.*

3. Доказателство, че е вярно $P(k+1)$ : *всяко множество с* $k+1$ *елемента има* $2^{k+1}$ *подмножества*:

   Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\}$. Всяко подмножество $X$ на множеството $A$ е от един от следните два вида:

   а) $X$ съдържа $a_{k+1}$

   б) $X$ не съдържа $a_{k+1}$, т.е. $X$ е подмножество на множеството $B = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

   Тогава $2^A = A_1 \cup A_2$, където $A_1 \subseteq 2^A$ - множеството от подмножествата от вида а), $A_2 \subseteq 2^A$ - множеството от подмножествата от вида б) и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Следователно, $|2^A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. От $A_2 = 2^B$ и $|B| = k$, съгласно допускането от т.2, следва, че $|A_2| = |2^B| = 2^k$. На всяко подмножество $X$ от $A_1$ съответства подмножеството $Y = X \setminus \{a_{k+1}\}$ от $A_2$, и обратно: на всяко подмножество $Y$ от $A_2$ съответства подмножеството $X = Y \cup \{a_{k+1}\}$ от $A_1$, от което следва, че $|A_1| = |A_2|$. Следователно, $|2^A| = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n$.