Малко контролно I

Име: ФН: Курс: Група:

Брой точки:

Задача 1: (*10 точки*) Подредете в асимптотично нарастващ ред функциите:

$$\sqrt{n}^{\lg n}, \quad 2^n, \quad (\lg n)^{\lg n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}, \quad n^2$$

Задача 2: (*10 точки*) Намерете сложността и резултата като функция на n за следната програма:

```
int a(int n)
{
    int s = 0;

    for (int i = 1; i < n; i++) s += 3*a(i) + 2;

    return s;
}
```

Задача 3: (*10 точки*) Докажете, че `alg1()` връща разликата между най-големия и най-малкия елемент на масива `a[n]`:

```
int a[n];

int alg1()
{
    int l = a[0], r = a[0];

    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        if (a[i] < l) l = a[i];
        if (a[i] > r) r = a[i];
    }

    return r - l;
}
```

Задача 4: (*10 точки*) Нека $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, положителна функция, за която:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$$

Докажете, че $f(n) \prec \ln \ln n$.

Решения:

Задача 1:

Правилният ред е:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \prec n^2 \prec (\lg n)^{\lg n} \prec \sqrt{n}^{\lg n} \prec 2^n$$

1.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \asymp n \ln n \prec n^2$$

2.

Тъй като $\lg n^2 = 2\lg n \prec \lg n . \lg\lg n = \lg\left((\lg n)^{\lg n}\right)$, то $n^2 \prec (\lg n)^{\lg n}$

3.

Тъй като $\lg\left((\lg n)^{\lg n}\right) = \lg n . \lg\lg n \prec \frac{1}{2}\lg^2 n = \lg\left(\sqrt{n}^{\lg n}\right)$, то $(\lg n)^{\lg n} \prec \sqrt{n}^{\lg n}$

4.

Тъй като $\lg\left(\sqrt{n}^{\lg n}\right) = \frac{1}{2}\lg^2 n \prec n = \lg(2^n)$, то $\sqrt{n}^{\lg n} \prec 2^n$

Задача 2:

Сложността може да се опише със следната рекурентна зависимост:

$$T(n) = T(1) + 1 + T(2) + 1 + \ \dots + T(n-1) + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n - 1$$

Аналогично:

$$T(n-1) = \sum_{i=1}^{n-2} T(i) + n - 2$$

, откъдето: $T(n) - T(n-1) = T(n-1) + 1 \ \Rightarrow \ T(n) = 2.T(n-1) + 1$

Това рекурентно уравнение има общ вид: $T(n) = c_1.2^n + c_2 = \Theta(2^n)$, за $c_1 > 0$

Резултатът може да се опише със следната рекурентна зависимост:

$$S(n) = 3S(1) + 2 + 3S(2) + 2 + \ \dots + 3S(n-1) + 2 = 3\sum_{i=1}^{n-1} S(i) + 2n - 2$$

Аналогично за $T(n-1)$ имаме:

$$S(n-1) = 3\sum_{i=1}^{n-2} S(i) + 2n - 4$$

, откъдето: $S(n) - S(n-1) = 3S(n-1) + 2 \ \Rightarrow \ S(n) = 4.S(n-1) + 2$

Това рекурентно уравнение има общ вид: $S(n) = c_1 . 4^n + c_2$

От $S(1) = 0$ и $S(2) = 2$ получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 4c_1 + c_2 \\ 2 = 16c_1 + c_2 \end{array} \right.$$

, с решение $c_1 = \frac{1}{6},\ c_2 = -\frac{2}{3}$

В такъв случай $S(n) = \frac{4^n - 4}{6}$, което е и резултатът от програмата.

Задача 3:

Нека с `l1` отбележим реда, на които е деклариран цикълът.

Твърдение: При всяко k-то достигане на `l1`: $i = k$, l и r съдържат съответно най-малкия и най-големия елемент сред $a[0], \ldots, a[k-1]$.

База: При първото достигане имаме: $i = 1, l = a[0], r = a[0]$ - най-малкият и най-големият сред елементите $a[0], \ldots, a[0]$ - вярно.

Поддръжка: Нека е вярно за някое k-то достигане, което не е последното: $i = k$, l и r съдържат съответно най-малкия и най-големия елемент сред $a[0], \ldots, a[k-1]$

След изпълненеи на командите `if (a[i] < l) l = a[i]` и `if (a[i] > r) r = a[i]` имаме:

$$l = \min\{l, a[k]\} = \min\{a[0], \ldots, a[k-1], a[k]\}$$

$$r = \max\{r, a[k]\} = \max\{a[0], \ldots, a[k-1], a[k]\}$$

Така, че на $k+1$-вото достигане, твърдението отново ще е вярно.

Терминация: На n-тото достигане имаме:

$$i = n, \qquad l = \min\{a[0], \ldots, a[n-1]\}, \qquad r = \max\{a[0], \ldots, a[n-1]\}$$

В този момент цикълът приключва.

След цикъла имаме `return r - l`, което връща търсената стойност.

Задача 4:

За произволни $x \neq y$ имаме:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 = |x-y| . |x-y| \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|$$

След граничен преход имаме:

$$\lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{x \to y} |x-y| = 0$$

От тук следва, че за произволно y, производната $f'(y)$ съществува и освен това $|f'(y)| \leq 0 \;\Rightarrow\; f'(y) = 0 \;\Rightarrow\; f = const > 0$.

Щом $f = const > 0$, то $f(n) \prec \ln \ln n$.