Малко контролно №1, КН2 8-ма група, 7.04.2015г.

Условия

1. Сравнете функциите по скорост на нарастване (в асимптотичен смисъл): (2%)

$f_1 = \lg\lg n$ $\quad f_2 = \lg^2 n$ $\quad f_3 = n$ $\quad f_4 = \binom{n}{3}$ $\quad f_5 = n\sqrt{n} + \lg(n!)$ $\quad f_6 = \mathrm{arctg}\, n$

2. Решете рекурентните зависимости по подходящ начин: (1,5%)

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$

$T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^2$

$T(n) = 6T(n-1) - 5T(n-2) + 5^n + 1$

3. Докажете, че следният алгоритъм връща второто най-голямо число в масива, който приема като аргумент. Приемете, че всички числа в него са различни. (1,5%)

```
Alg-1(A[1,…,n]: integers)

p ⟵ max(A[1],A[2])
q ⟵ min(A[1],A[2])
for i ⟵ 3 to n
    if A[i]>p
        q ⟵ p
        p ⟵ A[i]
    else
        if A[i] > q
            q ⟵ A[i]
return q
```

<u>Бонус:</u> Вярно ли е, че за всяка асимптотично положителна функция $f(n) \preccurlyeq (f(n))^2$? Ами $f(n) \asymp f(\frac{n}{2})$? (допуснете, че n е четно) (2%)

Решения

1. Преди да започнем да сравняваме функциите, е хубаво да опростим максимално тези, зададени по различен начин – в случая f_4 и f_5.

$$f_4 = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \Theta(n^3)$$

Да определим тита-класа на f_5 си е отделна малка задача. Първо можем да използваме следствието от апроксимацията на Стърлинг, което ни дава $f_5 = n\sqrt{n} + \lg(n!) \asymp n\sqrt{n} + n\lg n$. След това ще изчислим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{n}}}{\mathrm{nlgn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{n}}}{\mathrm{lgn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{n}}}}{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}}{2\sqrt{\mathrm{n}}} = \infty$$

При второто равенство прилагаме правилото на Лопитал, тъй като и двете функции нарастват безкрайно при n клонящо към безкрайност. Сега ще използваме, че f(n)+g(n) = Θ(max{f(n),g(n)}) и ще заключим, че f_4 = Θ($\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{n}}$), което е далеч по-пригледно и приятно за сравнение.

За самите сравнения можем да започнем с последната функция – arctgn. Нейното ключово свойство е, че тя е ограничена отгоре. Имайки предвид, че всяка от останалите функции е нарастваща неограничено, то е очевидно, че arctgn е най-бавната. Единият начин за доказателство е:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctgn}}{\mathrm{f_k(n)}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{f_k(n)}} = 0$$

…където $\mathrm{f_k}$ е коя да е измежду другите пет функции. Обърнете внимание, че arctgn си има много точна граница при $\mathrm{n}\to\infty$, тоест не можем да използваме правилото на Лопитал! Ако имахме функция, за която тази граница не съществува, но е все така ограничена– например 2+sinn, то разсъждението би било малко по-различно:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{f_k(n)}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2+\mathrm{sinn}}{\mathrm{f_k(n)}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\mathrm{f_k(n)}}$$

Тук лявата и дясната граници са нули, следователно по теоремата за двамата полицаи (и няколко други „тривиални“ разсъждения относно граници) и тази в средата е нула.

Алтернативно, можем веднага да докажем, че arctgn= Θ(1) по дефиницията за Θ нотацията. Нека вземем n_0 = 1, $c_1 = \frac{\pi}{4}$ и $c_2 = \frac{\pi}{2}$ (все пак arctg1 е точно $\frac{\pi}{4}$). Тогава е вярно, че за ∀n>n_0 $\frac{\pi}{4}$.1 ≤ arctgn ≤ $\frac{\pi}{2}$.1, следователно arctgn= Θ(1). Остава валидно твърдението, че тя е най-бавната функция заради ограничеността си. Иначе е достатъчно да направим само едно сравнение на arctgn с най-бавната от другите функции, което да ѝ бетонира мястото в подредбата. Сравненията между останалите функции са далеч по-безинтересни:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{lglgn}}{\mathrm{lg^2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{lgn}}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}}{2.\,\mathrm{lgn}.\frac{1}{\mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2.\,\mathrm{lg^2n}} = 0$$

От друга страна можем да напишем, че lglgn ≺ lgn ≺ $\mathrm{lg^2n}$, но тук трябва да посочим защо lglgn ≺ lgn, или защо въобще за някоя нарастваща безкрайно функция f lgf ≺ f:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{lg(f(n))}}{\mathrm{f(n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{f(n)}}.\mathrm{f'(n)}}{\mathrm{f'(n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{f(n)}} = 0$$

Този начин отнема същото време, но е полезно универсално свойство и хубаво нестандартно решение. Продължавайки нататък:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2.\lg n.\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2.\lg n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2.\frac{1}{n}}{1} = 0$$

Дотук сме използвали само правилото на Лопитал. Останалите три функции, които са еквивалентни на три различни степени на n, можем да сравним съвсем тривиално: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{n}} = 0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^3} = 0$

Тъй като доказахме принадлежността на f_4 и f_5 към класовете $\Theta(n^3)$ и $\Theta(n\sqrt{n})$, то можем за сравненията да вземаме други представители на тези класове – изцяло за наше улеснение. Окончателната наредба е следната: $f_6 \prec f_1 \prec f_2 \prec f_3 \prec f_5 \prec f_4$.

2. Първите две рекурентни отношения се решават най-лесно с помощта на Мастър теоремата, а третото – по метода на характеристичното уравнение.

- $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n \Rightarrow k = \log_3 4$; $f(n) = n$. Тук $k > 1$, следователно можем да изберем $\varepsilon = \frac{\log_3 4 - 1}{2}$ такова, че $k - \varepsilon = \log_3 4 - \varepsilon > 1$. В следствие от това неравенство попадаме в първия случай на Мастър теоремата, а именно $f(n) = n = O(n^{k-\varepsilon})$, откъдето $T(n) = \Theta(n^k)$. Обърнете внимание, че ε трябва да бъде положително, числото $\frac{1-\log_3 4}{2}$ не ни върши работа!

- $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^2 \Rightarrow k = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$; $f(n) = n^2$. В този случай f(n) очевидно е $\Theta(n^k)$, следователно по Мастър теоремата (II сл.) $T(n) = \Theta(n^2.\lg n)$.

- $T(n) = 6T(n-1) - 5T(n-2) + 5^n + 1$. Уравнението, породено от хомогенната част на рекурентното отношение, е $x^2 = 6x - 5$ или $x^2 - 6x + 5 = 0$. Можем да достигнем до него и като напишем $x^n = 6.x^{n-1} - 5.x^{n-2}$ (както е рекурентната зависимост) и да съкратим на възможно най-високата степен. Мултимножеството от корените му е $\{1,5\}_{\mathbf{M}}$, а нехомогенната част представяме като $5^n.1 + 1^n.1$. Тези множители добавяме само по веднъж в мултимножеството, тъй като съответстващите им полиноми са от нулева степен, и получаваме окончателно $\{1,1,5,5\}_{\mathbf{M}}$. Следователно за някои положителни константи A, B, C и D имаме $T(n) = A.1^n + B.n.1^n + C.5^n + D.n.5^n = \Theta(n.5^n)$.

3. За доказателството на твърдението ще формулираме инварианта на основния цикъл на алгоритъма. При съставянето ѝ трябва да внимаваме за няколко неща:

- доказателството в частите База и Терминация да бъде просто и тривиално

- да бъде достатъчно съдържателна, че доказателството на етап Поддръжка да се упова изцяло на нея и да не използва други „паднали от небето“ факти или свойства.

Следвайки само първата насока, човек може бързо да напише за инварианта „На всяко достигане на ред 3 **q** съдържа второто най-голямо число в масива A[1,…,i-1]“. Започвайки доказателството, ще стигнем до момент, в който използваме, че **p** е очевидно най-голямото число в масива A[1,…,i-1] – но това не ни е гарантирано от инвариантата и не можем да сме сигурни, че е вярно. Извод: трябва да допълним инвариантата и за променливата **p**, след което да доказваме (и да ползваме) успоредно и нейното свойство. Окончателно:

> *„При всяко достигане на ред 3 променливата **p** съдържа най-голямото число в подмасива A[1,…,i-1], а **q** съдържа второто най-голямо число в същия подмасив.“*

База. При първото достигане на ред 3 **i** заема първоначалната стойност от 3. Тогава подмасивът A[1,…,i-1] съдържа само два елемента – първите два в масива. След присвояванията от редове 1 и 2 **p** съдържа по-голямото число измежду A[1] и A[2], което е най-голямо в A[1..2], а **q** съдържа по-малкото число от A[1] и A[2]. По-малкото от две числа е очевидно второто най-голямо измежду тях, следователно инвариантата е изпълнена.

Поддръжка. Нека изпълнението на алгоритъма е достигнало до ред 3, но не за последен път, и инвариантата е била изпълнена при всички достигания на ред 3 досега. Знаем, че за текущото **i** **p** пази най-голямото число от A[1,…,i-1], а **q** – второто най-голямо в A[1,…,i-1]. Двата условни оператора пораждат следните три случая, които са изчерпателни:

- A[i] > **p** (> **q**). След присвояването на ред 5 **q** придобива стойността на най-голямото число в A[1,…,i-1]. Тъй като само A[i] е по-голямо от него, то относно подмасива A[1,…,i] **q** съдържа втория по големина елемент. На ред 6 **p** получава стойността на A[i], което според инвариантата е по-голямо от всички числа в A[1,…,i-1], следователно е най-голямото в A[1,…,i]. При следващото достигане на ред 3 **i** ще се увеличи с 1 и спрямо новото **i** **p** съдържа най-голямото число в A[1,…,i-1], а **q** – второто най-голямо число в същия подмасив. Инвариантата в този случай е изпълнена.

- **p** > A[i] > **q**. Тъй като p е било най-голямото число в A[1,…,i-1], а A[i] не е по-голямо от него, то p ще бъде най-голямото число и в подмасива A[1,…,i]. На ред 9 **q** ще присвои стойността на A[i]. Тъй като **q** е било второто най-голямо число в A[1,…,i-1] и A[i] > **q**, то A[i] ще бъде по-голямо от всички числа в A[1,…,i-1] – с изключение на **p**, естествено. Оттук следва, че новата стойност на **q** отново ще бъде втората най-висока в подмасива A[1,…i] и при следващото достигане на ред 3 и новата стойност на **i** **p** и **q** ще бъдат съотв. първото и второто най-големи числа от A[1,…,i-1] и инвариантата остава непокътната.

- **p** > **q** > A[i]. В този случай нашият алгоритъм няма да извърши нищо преди следващата итерация на цикъла. Но щом **p** съдържа най-голямото число от A[1,…,i-1], значи то ще бъде най-голямото и за A[1,…,i]. Аналогично, щом в **q** се пази второто най-голямо число в A[1,…,i-1], т.е. по-голямо от всички без **p**, то и за A[1,…,i] **q** ще е по-голямо от всички числа - без **p**. Отново след инкрементацията на **i** **p** ще съдържа най-голямото число от „новия“ подмасив A[1,…,i-1], а **q** – второто най-голямо число от същия A[1,…,i-1], следователно инвариантата остава изпълнена.

Терминация. При последното достигане на ред 3 **i** ще стане **n+1** и няма да навлезем в тялото на цикъла. За това **i** ще е вярно, че **p** и **q** са най-големите две числа в подмасива A[1,…,(n+1)-1], а именно – за целия масив A[1,…,n]. На ред 10 алгоритъмът ще върне точно стойността в променливата **q,** с което доказателството ни приключва.

Бонус. Почти всеки път, когато условието е зададено по този начин, отговорът е „не“ и всъщност се иска човек да се досети за изключението от правилата. Как става това досещане е съвсем друг въпрос – най-често е на принципа „умен съм бил, сетил съм се“ (или „умен съм бил, зачел съм сборника на доц. Марков“ – за конкретния тип задача). Ето насоки за решението:

$f(n) \preccurlyeq (f(n))^2$ – знаем, че релацията между функции $\preccurlyeq$ е слабо свързана с релацията между числа $\leq$. За да оборим това твърдение, можем да пробваме с някоя функция, при която не е изпълнено, че при достатъчно големи n $f(n) \leq (f(n))^2 \Leftrightarrow$ искаме $(f(n))^2 < f(n)$. Тъй като говорим за функция, която е и положителна за достатъчно големи n, значи се насочваме към такава, която при $n \to \infty$ се „смества“ в интервала (0;1). Най-простата отговаряща функция е $\frac{1}{n}$. Естествено, това са само догадки и трябва да проверим дали наистина $\frac{1}{n} \succ \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty$$

Бинго! Този контра-пример показва, че първото твърдение не е винаги вярно. Вторият пример даже е малко по-лесен. Искаме да намерим функция, за която при заместването на n с $\frac{n}{2}$ ще получим друга, която драстично се различава от първата. Нека се насочим към нарастващите функции – все пак повечето, с които сме се занимавали в рамките на този курс, са такива. Търсим някоя *много* бързо растяща, надявайки се тя да ни послужи като пример. Първата, за която може да се сети човек, е експоненциалната функция - 2^n. Нека проверим за нея:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{2}} = \infty$$

Отново сполучихме от първия опит и показахме, че за функцията $f(n) = 2^n$ $f(n) \succ f(\frac{n}{2}) \Leftrightarrow f(n) \not\asymp f(\frac{n}{2})$. Забележете, че ако бяхме избрали някой полином на n, например n^3 или дори n^{1000}, щяхме да получим релацията $\asymp$, тъй като 2^{1000} си е константа (макар и голяма), която Θ-нотацията игнорира. Ако надуем полинома до n^n, вече ще получим търсената от нас релация $\succ$. Накрая – и добре познатият ни прост факториел би ни свършил работа.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}}{(\frac{\mathrm{n}}{2})^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n}^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}{2^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}.\,2^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}{\mathrm{n}^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^{\frac{\mathrm{n}}{2}}.\,2^{\frac{\mathrm{n}}{2}}}{1}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}!}{\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\ldots\left(\frac{\mathrm{n}}{2}+1\right)\frac{\mathrm{n}}{2}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}-1\right)\ldots3.2.1}{\frac{\mathrm{n}}{2}\left(\frac{\mathrm{n}}{2}-1\right)\ldots3.2.1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\ldots\left(\frac{\mathrm{n}}{2}+1\right)}{1}=\infty$$

Край.