Упражнение 6 (Мастър теорема)

Теорема: (Мастър теорема)

За $a \geq 1$, $b > 1$ и $f(n)$ - положителна е дадено рекурентното уравнение:

$$T(n) = a.T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Случай 1: Ако $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ за някое $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
Случай 2: Ако $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$
Случай 3: Ако $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ за някое $\varepsilon > 0$ и

$$\exists c \in (0,1)\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 : a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)$$

, то $T(n) = \Theta\left(f(n)\right)$

Втората част от *Случай 3* се нарича *условие за регулярност.*

Условието на следващите примери е да се намери сложността на рекурентното уравнение:

Пример 1:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Имаме:

$$n = O(n^{2-0.1}) = O\left(n^{\log_2 4 - 0.1}\right) \xRightarrow{MTh\ 1} T(n) = \Theta(n^2)$$

Пример 2:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$$

Имаме:

$$n^3 = O(n^{4-0.1}) = O\left(n^{\log_{\sqrt{2}} 4 - 0.1}\right) \xRightarrow{MTh\ 1} T(n) = \Theta(n^4)$$

Пример 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Имаме:

$$n = \Theta(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) \xRightarrow{MTh\ 2} T(n) = \Theta(n \lg n)$$

Пример 4:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Имаме:

$$1 = \Theta(1) = \Theta\left(n^{\log_2 1}\right) \xRightarrow{MTh\ 2} T(n) = \Theta(\lg n)$$

Пример 5:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + n$$

Имаме:

$$n = \Omega\left(\sqrt{n}\right) = \Omega\left(n^{\log_8 2 + \frac{1}{6}}\right)$$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 2.\frac{n}{8} \leq \frac{1}{3}.n$$

От $MTh\,3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

Пример 6:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + n\lg n$$

Имаме:

$$n\lg n = \Omega\left(n^{\frac{5}{6}}\right) = \Omega\left(n^{\log_9 3 + \frac{1}{3}}\right)$$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 3.\frac{n}{9}.\lg\frac{n}{9} \leq \frac{1}{3}n\lg n$$

От $MTh\,3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n\lg n)$

Пример 7:

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n$$

Имаме:

$$n\lg n = O\left(n^{\frac{3}{2}-0.1}\right) = O\left(n^{\log_4 8 - 0.1}\right) \xRightarrow{MTh\,1} T(n) = \Theta\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$$

Пример 8:

$$T(n) = 2\sqrt{2}T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$$

Имаме:

$$n^3 = \Theta(n^3) = \Theta\left(n^{\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}}\right) \xRightarrow{MTh\,2} T(n) = \Theta(n^3\lg n)$$

Пример 9:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n}$$

Имаме:

$$n^2\sqrt{n} = \Omega\ (n^{2+0.1}) = \Omega\left(n^{\log_2 4+0.1}\right)$$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 4.\frac{n^2\sqrt{n}}{4\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}n^2\sqrt{n}$$

От $MTh\ 3\ \Rightarrow\ T(n) = \Theta\left(n^2\sqrt{n}\right)$

Пример 10: (частен случай на Мастър теоремата)

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

, където $a \geq 1, b > 1, t \geq 0, f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n\right)\ \Rightarrow\ T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}+1} n\right)$

В този пример теоремата е неприложима!

1. $f(n) \neq O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, тъй като $n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n \succ n^{\log_b a-\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$
2. $f(n) \neq \Theta(n^{\log_b a})$, тъй като $n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n \succ n^{\log_b a}$
3. $f(n) \neq \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, тъй като $n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n \prec n^{\log_b a+\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$

Доказателството:

Нека $f(n) = c.n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n$, $c > 0$, $n = b^m$.

Сега:

$$S(m) = T(b^m) = aT(b^{m-1}) + c.b^{m\log_b a}\lg^t b^m = aS(m-1) + a^m m^t c.\lg^t b$$

Тъй като $c.\lg^t b = const > 0$, то $S(m)$ има общо решение:

$S(m) = c_1a^m + c_2m.a^m + \ \dots + c_{t+2}m^{t+1}a^m = \Theta(a^m m^{t+1}) = \Theta\left(n^{\log_b a}\lg^{t+1} n\right)$, където $c_{t+2} > 0$

Сега нека $h(n) = n^{\log_b a}\lg^{\mathrm{t}} n$ и $f(n) = \Theta\left(h(n)\right)$, като $f(n)$ е дефинирана за всяко n.

Имаме:

$$\exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c_1.h(n) \leq f(n) \leq c_2.h(n)$$

Нека:

$$m = \min\left\{\frac{f(2)}{h(2)}, \frac{f(3)}{h(3)}, \dots, \frac{f(n_0)}{h(n_0)}, c_1\right\}, \qquad M = \max\left\{\frac{f(2)}{h(2)}, \frac{f(3)}{h(3)}, \dots, \frac{f(n_0)}{h(n_0)}, c_2\right\}$$

(започват от 2, тъй като $h(1) = 0$ и не може да е в знаменател)

Тъй като $f(n)$ и $h(n)$ са положителни за $n \geq 2$, то m и M също са положителни. В такъв случай е вярно, че:

$$\forall n \geq 2: m.h(n) \leq f(n) \leq M.h(n)$$

Да разгледаме рекурентните уравнения:

$$U_1(n) = aU_1\left(\frac{n}{b}\right) + m.h(n)$$

$$U_2(n) = aU_1\left(\frac{n}{b}\right) + M.h(n)$$

, за които искаме $U_1(1) \leq T(1) \leq U_2(1)$

Вярно е, че $T(n) = \Omega\big(U_1(n)\big)$, тъй като за всяко рекурсивно викане $T(n)$ има по-голяма или равна допълнителна сложност от $U_1(n)$. Аналогично $T(n) = \mathrm{O}\big(U_2(n)\big)$.

За U_1 и U_2, обаче е вярно предишното доказателство, така че $U_1(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right)$ и $U_2(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right)$.

В такъв случай:

$$T(n) = \Omega\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right) \text{ и } T(n) = \mathrm{O}\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right)$$

Пример 11:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\sqrt{n} \lg^3 n$$

Имаме:

$$2\sqrt{n} \lg^3 n = \Theta\left(\sqrt{n} \lg^3 n\right) = \Theta\left(n^{\log_4 2} \lg^3 n\right)$$

От предишния пример $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta\left(\sqrt{n} \lg^4 n\right)$

Пример 12:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \lg n$$

Имаме:

$$\lg n = \Theta(\lg n) = \Theta\left(n^{\log_2 1} \lg n\right)$$

От пример 10 $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta(\lg^2 n)$

Пример 13:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\lg n}$$

Тук не е приложим дори частният случай!

1. $\frac{1}{\lg n} \neq O(n^{-\varepsilon})$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \succ n^{-\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$
2. $\frac{1}{\lg n} \neq \Theta(1)$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \prec 1$
3. $\frac{1}{\lg n} \neq \Omega(n^{\varepsilon})$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \prec n^{\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$
4. $\frac{1}{\lg n} = (\lg n)^{-1}$

Нека $n = 2^m$.

Сега имаме:

$$S(m) = T(2^m) = T(2^{m-1}) + \frac{1}{m} = S(m-1) + \frac{1}{m}$$

Сложността на $S(m)$ се изразява чрез сумата:

$$S(m) = S(0) + 1 + \frac{1}{2} + \ \dots + \frac{1}{m} = S(0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \asymp \ln m \asymp \lg m = \lg \lg n$$