Семестриално контролно за курса ДАА, 19.04.2015г.

Име: __________________________________, ФН:______, Спец.:_____, Гр.:____

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Функциите $f(n)$, $g(n)$ и $h(n)$ са асимптотично положителни.
Докажете, че ако $f(n) = O(g(n) + h(n))$ и $h(n) = o(f(n))$, то $f(n) = O(g(n))$.

Задача 2 Решете следните рекурентни уравнения:

а) $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) + n2^n$ б) $T(n) = T(n-1) + n\sqrt{n}$

в) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 2^n$ г) $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + n^2 \lg n$

Задача 3 Даден е алгоритъмът:

```
Easy1(n: integer)
  1  s ← 0; i ← 0
  2  while s ≤ n do
  3      s ← s + 2i + 1
  4      i ← i + 1
  5  return i
```

(а - 7т.) Докажете, че всеки път когато се изпълнява ред 2, е изпълнено $s = i^2$.

(б - 7т.) Оценете времевата сложност като функция на n.

(в - 6т.) Каква функция изчислява алгоритъмът?

Задача 4 Масив е k-сортиран, ако всеки елемент се намира на разстояние $< k$ от позицията, която би заемал в сортирания масив. 1-сортиран масив е сортиран.
Даден е k-сортиран масив. Предложете алгоритъм със сложност $O(n \lg(k))$, който го сортира.

Упътване: Опитайте да използвате структурата пирамида (binary heap).

Задача 5 В масива от цели числа $A[1 \dots n]$ ще наричаме два елемента подобни, ако разликата им се дели на n. Предложете линеен алгоритъм, който разпознава дали масивът съдържа подобни елементи, или докажете, че такъв алгоритъм не съществува.

Задача 6 Елементите на масива $A[1 \dots n]$ са точки в тримерното пространство, зададени с координатите си – $A[i] =< x_i, y_i, z_i >$. Нека $d = \min_{i \neq j} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ е дължината на най-късата отсечка между точките от A.

Докажете, че всеки алгоритъм, който изчислява d, има сложност $T(n) = \Omega(n \lg(n))$.

Решения:

Задача 1

От дефинициите на класовете O и o и зависимостите в условието получаваме:

$$\exists c > 0, \exists n_0, n > n_0 \rightarrow f(n) \leq cg(n) + ch(n) \tag{1}$$
$$\forall d > 0, \exists n_1, n > n_1 \rightarrow h(n) \leq df(n) \tag{2}$$

Умножаваме неравенството (2) по c и сумираме с (1). За достатъчно големи n ще е изпълнено:

$$f(n) \leq cg(n) + cdf(n)$$

Избираме $d = \frac{1}{2c}$ и получаваме:

$$f(n) \leq cg(n) + \frac{1}{2}f(n)$$

Опростяваме:

$$\frac{1}{2}f(n) \leq cg(n)$$

Или:

$$f(n) \leq 2cg(n)$$

От последното неравенство следва твърдението на задачата.

Задача 5

Два елемента на A са подобни, ако при целочисленото им делене на n се получават еднакви остатъци.

(1) Създаваме нов масив $B[0 \ldots n-1]$ и го запълваме с нули.

(2) Правим цикъл по масива A. Нека е r_i остатъкът при делене на n на елемента $A[i]$. Увеличаваме $B[r_i]$ с единица.

(3) След изпълнението на цикъла проверяваме дали $B[i] \geq 2$ за някое i. Ако да, то в A има подобни елементи.

Всички стъпки в горната схема имат линейна сложност, следователно предложеният алгоритъм е линеен.

Идеята на изложената схема е близка до CountingSort. В случая използваме остатъците като ключове при сортиране, а те са малки цели числа.

Задача 6

Задачата Min_dist за намиране на най-малка разлика между елементи на масив е частен случай на поставената задача, когато всички точки лежат на една права.

Тъй като сложността на Min_dist е от клас $\Omega(n \lg n)$ (доказвано на лекции), следва че и сложността на поставената задача е от същия клас.