Домашно №4 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2015г.

ТЕМА: РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ. ГРАФИ. ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**Макс.**
получени точки					
от максимално	15	15	15	20	65

Задача 1: (15т.)Намерете рекурентно отношение и начални условия за броя на думите над азбуката $A = \{a, b\}$ с дължина n, $n \in \mathbb{N}$, всяка от които започва с a и завършва с b. Колко е броят на тези думи с дължина $n = 10$?

Решение:

Нека $n \in \mathbb{N}$, W_n е множеството от думи над азбуката A с дължина n, $S_n \subseteq W_n$ - множеството от думи, всяка от които започва с a и завършва с b, $|S_n| = a_n$ и ε е празната дума. Тогава:

$a_0 = 0$, защото $W_0 = \{\varepsilon\}$, от което следва, че $S_0 = \emptyset$

$a_1 = 0$, защото $W_1 = \{a, b\}$, от което следва, че $S_1 = \emptyset$

$a_2 = 1$, защото $W_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$, от което следва, че $S_2 = \{ab\}$

$a_3 = 2$, защото $W_3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, ..., bbb\}$, от което следва, че $S_3 = \{aab, abb\}$

$a_4 = 4$, защото $W_4 = \{aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, ..., bbbb\}$, от което следва, че $S_4 = \{aaab, aabb, abab, abbb\}$.

Нека $n \geq 3$. Всяка дума δ от S_n е от един от следните два вида:

а) $\delta = a\omega ab, a\omega a \in W_{n-1}$

б) $\delta = a\omega bb, a\omega b \in S_{n-1}$

Следователно, $S_n = A_1 \cup A_2$, където $A_1 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида а), $A_2 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида б), като множествата са непресичащи се, и съгласно принципа на събирането $|S_n| = |A_1| + |A_2| = |W_{n-3}| + |S_{n-1}|$.

И така, получихме следното рекурентно отношение: $a_n = a_{n-1} + 2^{n-3}$.

Използвайки полученото рекурентно отношение, за броя на думите с дължина $n = 10$, всяка от които започва с a и завършва с b, получаваме 256, както се вижда от следващата таблица.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^{n-3}				1	2	4	8	16	32	64	128
a_n	0	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Задача 2: (15т.) Да се докаже, че ако в граф с n върха има $n-1$ висящи върха (със степен 1), то графът или е дърво или не е свързан.

Решение: Нека е даден граф $G(V,E), |V| = n$. Без ограничение на общността да приемем, че върховете $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ имат степен 1, а степента на последния връх е произволна, т.е. $0 \leq d(v_n) \leq n-1$. Ще разгледаме следните случаи:

1. $d(v_n) = n-1$. Това означава, че v_n е свързан с ребро с всеки от останалите върхове, т.е. графът е свързан и няма цикли, следователно е дърво.

2. $d(v_n) < n-1$. Тогава $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E| < 2(n-1) \Rightarrow |E| < n-1$. Но това означава, че е нарушено необходимото условие графът да е свързан, следователно графът не е свързан.

Задача 3: (15т.) Да се докаже, че ако в граф с n върха има точно два върха с равни степени, то в графа или има точно един връх със степен 0, или има точно един връх със степен $n-1$.

Решение: Нека $G(V,E), |V| = n$ е граф, който има точно два върха с равни степени. Това означава, че степените на графа са $n-1$ различни числа в интервала $[0, n-1]$. Но ако графът има връх със степен 0, то той не може да има връх със степен $n-1$, следователно са възможни следните два случая:

1. Степените на върховете на графа са всички числа от интервала $[0, n-2]$. Да допуснем, че има два върха със степен 0 и без ограничение на общността тези върхове са v_1 и v_2. Сега да разгледаме графа $G'(V \setminus \{v_1, v_2\}, E)$, получен от G чрез отстраняване на върховете v_1 и v_2. Неговите върхове са $n-2$ на брой, а техните степени са $n-2$ различни числа, а именно числата от 1 до $n-2$. Това обаче противоречи на факта, че всеки граф има поне два върха с равни степени. Следователно, върховете с равни степени не са от степен 0, т.е. в графа има точно един връх със степен 0.

2. Степените на върховете са всички числа от интервала $[1, n-1]$. Да допуснем, че двата върха с равни степени имат степен $n-1$ и нека без ограничение на общността тези върхове са v_1 и v_2. Сега да разгледаме допълнението на графа $G(V,E)$, а именно графа $\overline{G}(V, V \times V \setminus E)$. В него има точно два върха с една и съща степен 0, а именно върховете v_1 и v_2, но в предната точка доказахме, че това не е възможно. Следователно в графа има точно един връх със степен $n-1$.

Задача 4: (20т.) Множествата T_0, T_1, M от двоични функции са определени, както следва:

$T_0 = \{f : J_2^n \to J_2 | f(0, ..., 0) = 0\}$

$T_1 = \{f : J_2^n \to J_2 | f(1, ..., 1) = 1\}$

$M = \{f : J_2^n \to J_2 | \forall \alpha, \beta \in J_2^n, \alpha \preceq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$, като

$R_{\preceq} \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) \in R_{\preceq} \Leftrightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq b_i\}$

а)(10т.) Напишете таблиците на двоичните функции $f(x,y,z) = (x \to y) \oplus (\overline{xyz})$ и $g(x,y,z) = x \oplus xy \oplus xyz$ и проверете дали двете функции съвпадат

Решение:

x	y	z	$x \to y$	xyz	$\overline{xyz}$	$(x \to y) \oplus (\overline{xyz})$	xy	$x \oplus xy \oplus xyz$
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1

Заключение: Функциите съвпадат, защото съответните им колони от функционални стойности съвпадат.

б)(5т.) Определете принадлежността на $f(x, y, z)$ към всяко от множествата T_0, T_1, M

Решение:

От таблицата на функцията се вижда, че $f(x, y, z) \in T_0$, $f(x, y, z) \in T_1$ и $f(x, y, z) \notin M$, защото $(1, 0, 0) \preceq (1, 1, 0)$, но $f(1, 0, 0) > f(1, 1, 0)$.

в)(5т.) Определете $|T_0 \cup T_1|$ и $|T_0 \setminus T_1|$

Решение:

$|T_0 \cup T_1| = |T_0| + |T_1| - |T_0 \cap T_1| = 2^{2^n-1} + 2^{2^n-1} - 2^{2^n-2} = 3 \times 2^{2^n-2}$

$|T_0 \setminus T_1| = |T_0| - |T_0 \cap T_1| = 2^{2^n-1} - 2^{2^n-2} = 2^{2^n-2}$