Примерни задачи и решения

***Задача 1***

 Дължината на страната на куб е *а.* Да се намерят дължината на диагонала на куба, лицето на повърхнината и обема му.

***Решение***

 От правоъгълния триъгълник ABD следва $BD^{2}= AB^{2}+AD^{2}$, $BD^{2}= a^{2}+a^{2}=2a^{2}$. От правоъгълния триъгълник DBD1 следва $D\_{1}B^{2}=DD\_{1}^{2}+DB^{2}= a^{2}+2a^{2}=3a^{2}⇒ D\_{1}B=a\sqrt{3}$. $S=6a^{2}, V= a^{3}$.

***Задача 2***

 Дължината на ръба на правилен тетраедър е *а*. Да се намерят височината, двустенният ъгъл при един от ръбовете и лицето на повърхнината му.

***Решение***

 Нека точката О е петата на височината през върха D на тетраедъра ABCD. Тя съвпада с медицентъра на триъгълника ABC. Да означим OD = h. Ако точката М е среда на BC, от правоъгълния триъгълник ABM получаваме $AM= \sqrt{AB^{2}-BM^{2}}=\sqrt{a^{2}-(\frac{a}{2})^{2}}= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AO= \frac{2}{3}, AM= \frac{a\sqrt{3}}{2}$. От правоъгълния триъгълник AOD следва, че

$h= \sqrt{AD^{2}- AO^{2}}=\sqrt{a^{2}-\frac{a^{2}}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Тетраедърът е правилен и двустенните ъгли при всички негови ръбове са равни. Ще определим двустенния ъгъл при ръба BC. Прилагаме първа косинусова теорема за тристенния ъгъл с връх В. В него и трите ръбни ъгли са по 60 градуса.

$$S=4S\_{ABC}=4\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}=a^{2}\sqrt{3}.$$

***Задача 3***

 Основите на триъгълна призма са равностранни триъгълници с дължина на страната *а*. Двете околни стени са еднакви успоредници с остър ъгъл *α*, а третата е правоъгълник. Дължината на околния ръб е *l*. Да се намерят лицата на околната и на пълната повърхнина.

***Решение***

 Нека BM e перпендикулярна на АА1. Тогава от правоъгълния триъгълник ABM следва, че $BM=a.sinα$. Сечението (MBC) е едно перпендикулярно сечение, следователно

$S=l\left(BM+MC+CB\right)=l(2a.sinα+a)$. Като вземем предвид, че $S\_{ABC}=\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}$, за лицето на повърхнината получаваме: $S\_{1}=S+2.S\_{ABC}=al\left(2sinα+1\right)+\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}$.

***Задача 4***

 Даден е правоъгълен паралелипипед с основни ръбове *a* и *b*, и околен ръб *c*. Да се намерят диагоналите на паралелипипеда, лицата лицата на околната и на пълната повърхнина, и обемът.

***Решение***

 Понеже паралелипипедът е правоъгълен, четирите му диагонала за равни. От правоъгълния приъгълник ABD имаме $BD^{2}=a^{2}+b^{2}$, а от правоъгълния триъгълник DBD1 получаваме, че диагоналът $BD\_{1}=\sqrt{DB^{2}+DD\_{1}^{2}}= \sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}.$ Лицето на околната повърхнина S ще получим, като съберем лицата на околните стени:

$S=2.S\_{ABB\_{1}A\_{1}}+2.S\_{ADD\_{1}A\_{1}}$, $S=2ac+2bc=\left(2a+2b\right)c=P.c$.

Лицето на повърхнината $S\_{1}$ на паралелипипеда намираме, като към лицето на околната повърхнина добавим лицата на двете основи.

$S\_{1}=S+2.S\_{ABCD}=2ac+2ab+2bc=2(ab+bc+ac)$.

Височината на паралелипипедва е c, а лицето на основата му е ab. Като използваме формулата за обем на паралелипипед, получаваме: V = abc.

***Задача 5***

 Дадена е правилна четириъгълна пирамида ABCDM с дължина на основния ръб *а* и височина *h*. Да се намерят лицата на околната и на пълната повърхнина, и обемът.

***Решение***

 Нека точката О е пета на височината на пирамидата, а MH – апотемата. От правоъгълния триъгълник OHM следва $MH= \sqrt{(\frac{a}{2})^{2}+h^{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}+4h^{2}}$. Понеже околната повърхнина се състои от 4 еднакви триъгълника, то лицето й е $S=4S\_{BCM}=4\frac{MN.BC}{2}=a\sqrt{a^{2}+4h^{2}}$. Лицето на основата е $B= a^{2}$. Лицето на повърхнината го пресмятаме така: $S\_{1}=a\sqrt{a^{2}+4h^{2}}+a$. Като използваме формулата за обем на пирамида, получаваме $V=\frac{ha^{2}}{3}$.

***Задача 6***

 Основата на триъгълна пирамида е правоъгълен триъгълник с хипотенуза *c* и остър ъгъл *α* при върха *А*. Ако всички околни ръбове са с еднаква дължина *l*, да се намерят височината на пирамидата и лицето на основата й.

***Решение***

 Тъй като всички околни ръбове на пирамидата ABCM са с еднаква дължина, то петата О на височината МО съвпада с центъра на описаната около основата ABC окръжност. Центърът на тази окръжност е средата на хипотенузата АВ. От правоъгълния триъгълник АОМ следва

$OM^{2}=AM^{2}-AO^{2}, OM^{2}=l^{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^{2}⇒OM=\frac{1}{2}\sqrt{2l^{2}-c^{2}}$. От правоъгълния триъгълник АВС имаме $AC=c.cosα, BC=c.sinα$. Сега за лицето на основата получаваме:

$S\_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{c^{2}.sinα.cosα}{2}$*.*

***Задача 7***

 Основата на пирамида е равнобедрен трапец с основи *a* и *b* (*а* > *b*). Всички околни стени сключват с основата един и същи ъгъл *α*. Да се намерят лицето на основата и височината на пирамидата.

***Решение***

 От условието, че всички околни стени сключват с основата един и същи ъгъл следва, че в основата ABCD може да се впише окръжност и петата О на височината МО на пирамидата съвпада с центъра на тази окръжност.

 От свойството на четириъгълник, описан около окръжност, получаваме

$AB+DC=AD+BC, AD+BC=a+b или AD=BC=\frac{a+b}{2}$*.*

От правоъгълния триъгълник AHD следва, че

$HD=2r=\sqrt{AD^{2}-AH^{2}}=\sqrt{(\frac{a+b}{2})^{2}-(\frac{a-b}{2})^{2}}=\sqrt{ab}$.

Сега за лицето S на основата на пирамидата намираме $S=\frac{a+b}{2}2r=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$. Височината ОМ на пирамидата намираме от правоъгълния триъгълник ОКМ:

$OM=OK.tgα=r.tgα=\frac{\sqrt{ab}}{2}.tgα$.

***Задача 8***

 Да се намерят радиусът и височината на прав кръгов цилиндър с обем *V* и лице на околната повърхнина *S*.

***Решение***

 От формулите на обем и лице на околната повърхнина на цилиндър $V= r^{2}πh$ и $S=2πrh$ намираме r и h. Разделям почленно двете равенства и получаваме:

$\frac{V}{S}= \frac{r^{2}πh }{2πrh} ⇒r= \frac{2V}{S}$. От $S= 2πrh=2π\frac{2V}{S}h ⇒h= \frac{S^{2}}{4Vπ}$.

***Задача 9***

 Правоъгълен триъгълник *ABC* с лице *Q* и катет *BC = a* се върти около *BC.* Да се определят обемът и лицето на околната повърхнина на полученото тяло.

***Решение***

 При завъртане на правилния триъгълник ABC около катета BC се получава прав кръгов конус с височина BC = a, радиус на основата AC и образувателна AB.

От $S\_{ABC}=Q ⇒Q= \frac{AC.BC}{2}=\frac{AC.a}{2} ⇒AC= \frac{2Q}{2}$. От Питагоровата теорема за приъгълник ABC следва $AB= \sqrt{BC^{2}+ AC^{2}}= \sqrt{a^{2}+ \frac{4Q^{2}}{a^{2}}}= \frac{1}{a}\sqrt{a^{4}+4Q^{2}}$. Заместваме във формулите за обема и лицето на околната повърхнина на конуса и получаваме:

$V= \frac{1}{3}πhr^{2}= \frac{1}{3}π.AC^{2}.BC= \frac{1}{3}πa\frac{4Q^{2}}{a^{2}}= \frac{4πQ^{2}}{3a}$;

$S= πrl= π.AC.BC= π\frac{2Q}{a}\sqrt{a^{2}+\frac{4Q^{2}}{a^{2}}}= \frac{2πQ}{a^{2}}\sqrt{a^{4}+4Q^{2}}$.