Приложение на производните за изследване на функции

Десислава Стоянова Войникова

Намиране на минимум и максимум на функция

Задача 1

Да се намерят локалните екстремуми на функцията: $y = x^4 - 2x^2$.

Намираме първата производна:

$$y' = 4x^3 - 4x$$

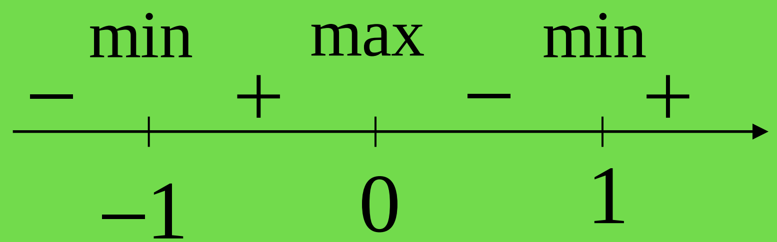
Разлагаме на множители:

$$y' = 4x\left(x^2 - 1\right) = 4x\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$$

Десислава Стоянова Войникова

Оттук се вижда, че първата производна се анулира в точките $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1.$

Тези точки разделят дефиниционната област $(-\infty;+\infty)$ *на подинтервалите* $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ *и* $(1;+\infty)$.



Когато x е в първия интервал $(-\infty;-1)$ *и трите множителя 4x, x-1, x+1 са отрицателни.*

Десислава Стоянова Войникова

Следователно в интервала $(-\infty;-1)$ $y' < 0.$

Когато х е във втория интервал $(-1;0)$ множителите 4х и х - 1 са отрицателни, а х + 1 е положителен.

Следователно в интервала $(-1;0)$ $y' > 0.$

Когато х е в третия интервал $(0;1)$ множителите 4х и х+1 са положителни, а х-1 е отрицателен.

Следователно в интервала $(0;1)$ $y' < 0.$

Десислава Стоянова Войникова

Когато х е в четвъртия интервал $(1;+\infty)$ *и трите множители 4х , х-1 и х+1 са положителни.*

Следователно в интервала $(1;+\infty)$ $y'>0.$

Следователно функцията е ***растяща*** *в интервалите* $(-1;0)$ *и* $(1;+\infty)$ *и е* ***намаляваща*** *в интервалите* $(-\infty;-1)$ *и* $(0;1)$ *.*

Намираме втората производна:

$$y''=12x^2-4$$

ако $f'(x)$ съществува

при $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$

то функцията има екстремум в тази точка

ако $f''(x_0) > 0$ -> $f(x_0)$ има минимум

ако $f''(x_0) < 0$ -> $f(x_0)$ има максимум

Десислава Стоянова Войникова

При $x_1 = 0 \quad y'' = 12.0^2 - 4 = -4 < 0$

=> функцията има **максимум** в точката

$x = 0$, като $y_{max} = y(0) = 0^4 - 2.0^2 = 0.$

При $x_2 = 1 \quad y'' = 12.1^2 - 4 = 8 > 0$

=> функцията има **минимум** в точката

$x = 1$, като $y_{min} = y(1) = 1^4 - 2.1^2 = -1.$

При $x_3 = -1 \quad y'' = 12.(-1)^2 - 4 = 8 > 0$

=> функцията има **минимум** в точката x

$= -1$, като $y_{max} = y(-1) = (-1)^4 - 2.(-1)^2 = -1.$

Задача 2

Да се намерят локалните екстремуми на функцията: $y = x^2 - 4x + 3$.

Намираме първата производна:

$$y' = 2x - 4$$

Анулираме първата производна:

$$2x - 4 = 0 \quad \to 2x = 4 \quad \to x = 2$$

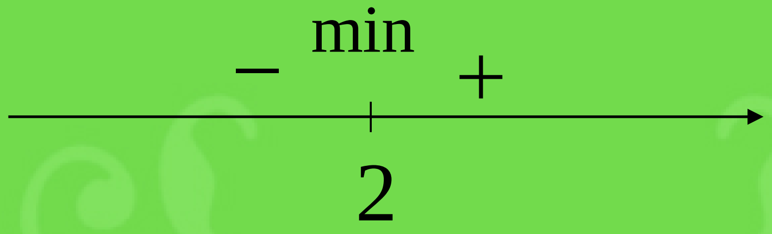
=> в точката $x = 2$ функцията има локален екстремум.

Намираме втората производна:

$y'' = 2$

При $x = 2$ $y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ функцията има **минимум** в точката $x = 2$, като

$y_{min} = y(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1.$



Задача 3

Да се намерят локалните екстремуми на функцията: $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 20$.

Намираме първата производна:

$$y' = 3x^2 - 18x + 15$$

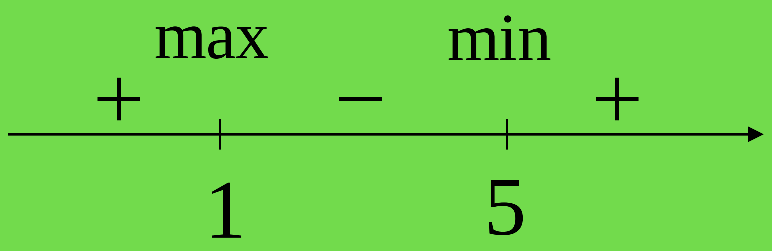
Анулираме първата производна:

$$3x^2 - 18x + 15 = 0 \quad \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$Д = 6^2 - 4.1.5 = 16 \qquad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1.$$

=> *в точките* $x_1 = 5$ *и* $x_2 = 1$ *функцията има локален екстремум.*



Намираме втората производна:

$$y'' = 6x - 18$$

При $x_1 = 5 \quad y'' = 6.5 - 18 = 12 > 0 \Rightarrow$ функцията има **минимум** в точката $x = 5$, като $y_{min} = y(5) = 5^3 - 9.5^2 - 15.5 - 20 = -45$.

При $x_2 = 1 \quad y'' = 6.1 - 18 = -12 < 0 \Rightarrow$ функцията има **максимум** в точката $x = 1$, като $y_{max} = y(1) = 1^3 - 9.1^2 - 15.1 - 20 = -13$.

Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексна точка.

Ако $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ е изпъкнала в точка x_0. Означаваме с $\cup$.

Ако $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в точка x_0. Означаваме с $\cap$.

Инфлексна точка – точка, в която функцията сменя своята изпъкналост.

Десислава Стоянова Войникова

Задача 1

Да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y = 3x^2 - x^3$ и да се намерят инфлексните точки.

Намираме първата производна:

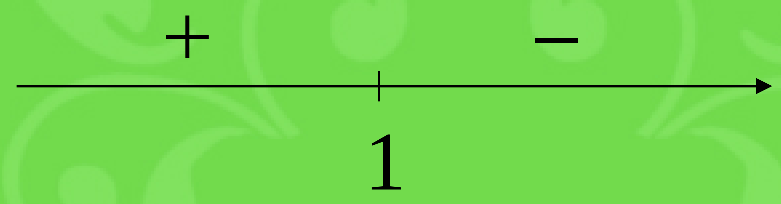
$$y' = 6x - 3x^2$$

Намираме втората производна:

$$y'' = 6 - 6x$$

Анулираме втората производна:

$$6(1 - x) = 0 \qquad \rightarrow x = 1$$



за $x > 1 \quad y'' < 0$

$\Rightarrow$ *функцията е вдлъбната в интервала* $(1; +\infty)$

за $x < 1 \quad y'' > 0$

$\Rightarrow$ *функцията е изпъкнала в интервала* $(-\infty; 1)$

Точката от графиката с абциса $x = 1$ *е инфлексна точка.*

$f(1) = 3.1^2 - 1^3 = 2$.

Точката $(1,2)$ *е инфлексна точка.*

Десислава Стоянова Войникова

Задача 2

Да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ и да се намерят инфлексните точки.

Намираме първата производна:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

Намираме втората производна:

$$y'' = 6x - 4$$

Анулираме втората производна:

$$3x - 2 = 0 \qquad \to x = \frac{2}{3}$$

Десислава Стоянова Войникова

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \frac{2}{3} & \end{array}$$

за $x < 2/3 \quad y'' < 0$

$\Rightarrow$ функцията е вдлъбната в интервала $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

за $x > 2/3 \quad y'' > 0$

$\Rightarrow$ функцията е изпъкнала в интервала $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Точката от графиката с абциса $x = 2/3$ е инфлексна точка.

$f(2/3) = (2/3)^3 - 2.(2/3)^2 + 2/3 - 1 = -25/27$.

Точката $(2/3, -25/27)$ е инфлексна точка.

Десислава Стоянова Войникова

Задача 3

Да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y=\ln\left(x^2+1\right)$ и да се намерят инфлексните точки.

Намираме първата производна:

$$y'=\frac{1}{x^2+1}2x$$

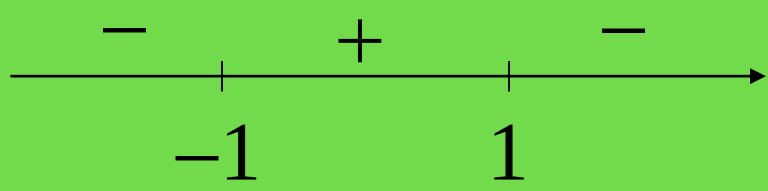
Намираме втората производна:

$$y''=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x.2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2-4x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Десислава Стоянова Войникова

Анулираме втората производна, като $(x^2+1)^2 > 0$ *за всяко x:*

$$2\left(1-x^2\right)=0 \quad \to x^2=1 \quad \to x_1=1, x_2=-1$$



за $x < -1 \quad y'' < 0$

$=>$ *функцията е вдлъбната в интервала* $(-\infty;-1)$

за $x > -1$ *и* $x < 1 \quad y'' > 0$

$=>$ *функцията е изпъкнала в интервала* $(-1;1)$

за $x > 1$ $y'' < 0$

=> функцията е вдлъбната в интервала $(1;+\infty)$

Точките от графиката с абциса $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ са инфлексни точки.

$f(1) = \ln(1^2+1) = \ln 2 = 0.693147.$

$f(-1) = \ln((-1)^2+1) = \ln 2 = 0.693147.$

Точките $(-1, \ln 2)$ и $(1, \ln 2)$ са инфлексни точки.

Задача 4

Да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y=\sqrt{1+x^2}$ и да се намерят инфлексните точки.

Намираме първата производна:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x$$

Намираме втората производна:

$$y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x}{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=$$

Десислава Стоянова Войникова

$$=\frac{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}-x^2\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Тъй като $\sqrt{1+x^2}>0$ *и* $(1+x^2)^2>0$ *(или* $f''>0$*) за всяко x, то функцията е изпъкнала в интервала* $(-\infty;+\infty)$.

Десислава Стоянова Войникова

Задача 5

Да се намерят локалните екстремуми на функцията, да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y = \frac{x}{1+x^2}$ и да се намерят инфлексните точки.

Определяме интервалите на растене и намаляване, и намираме локалните екстремуми на функцията – минимум и максимум

Намираме първата производна:

$$y' = \frac{1+x^2 - x.2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Анулираме първата производна, като $(1+x^2)^2 > 0$ за всяко x:

$$-x^2+1=0 \quad \rightarrow x^2=1 \quad \rightarrow x_1=1, x_2=-1$$

=> в точките $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ функцията има локален екстремум.

Тези точки разделят дефиниционната област $(-\infty;+\infty)$ на подинтервалите $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;+\infty)$.

Десислава Стоянова Войникова

min max

$-$ $+$ $-$

-1 1

В интервала $(-\infty;-1)$ $y' = \dfrac{-x^2+1}{\left(1+x^2\right)^2} < 0.$

В интервала $(-1;1)$ $y' > 0.$

В интервала $(1;+\infty)$ $y' < 0.$

Следователно функцията е ***растяща*** *в интервала* $(-1;1)$ *и е* ***намаляваща*** *в интервалите* $(-\infty;-1)$ *и* $(1;+\infty)$.

Намираме втората производна:

$$y'' = \frac{\left(-x^2+1\right)'.\left(1+x^2\right)^2 - \left(-x^2+1\right)\left(\left(1+x^2\right)^2\right)'}{\left(\left(1+x^2\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - \left(-x^2+1\right)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right).\left(-2x-2x^3+4x^3-4x\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

При $x_1 = 1$ $\quad y'' = \dfrac{2.1\left(1^2-3\right)}{\left(1+1^2\right)^3} = \dfrac{2(-2)}{(2)^3} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} < 0$

=> функцията има **максимум** в точката $x = 1$, като $y_{\max} = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

При $x_1 = -1$ $\quad y'' = \dfrac{2.(-1)\left((-1)^2-3\right)}{\left(1+(-1)^2\right)^3} = \dfrac{-2(-2)}{(2)^3} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} > 0$

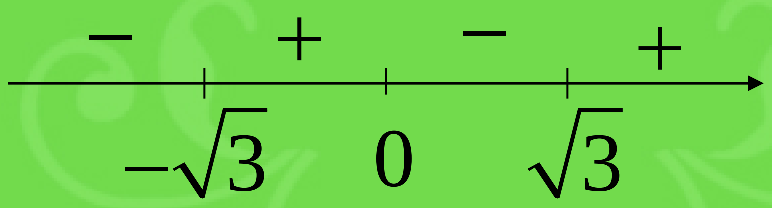
=> функцията има **минимум** в точката $x = -1$, като $y_{\min} = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Определяме интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, и инфлексните точки

Анулираме втората производна $y'' = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$,

като $(1+x^2)^3 > 0$ за всяко x:

$$2x\left(x^2-3\right)=0 \quad \rightarrow x_1=0,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3}$$



$за\ x < -\sqrt{3} \quad y'' < 0$

$=>$ *функцията е* ***вдлъбната*** *в интервала* $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$

$за\ x > -\sqrt{3}\ \ и\ x < 0 \quad y'' > 0$

$=>$ *функцията е* ***изпъкнала*** *в интервала* $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$

$за\ x > 0\ \ и\ x < \sqrt{3} \quad y'' < 0$

$=>$ *функцията е* ***вдлъбната*** *в интервала* $\left(0; \sqrt{3}\right)$

$за\ x > \sqrt{3} \quad y'' > 0$

$=>$ *функцията е* ***изпъкнала*** *в интервала* $\left(\sqrt{3}; \infty\right)$

Точките от графиката с абциса $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ и $x_3 = -\sqrt{3}$ са инфлексни точки.

$$f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Точките $(0;0)$, $\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ *и* $\left(-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ *са* ***инфлексни точки.***

Десислава Стоянова Войникова

Изчисление с Mathematica

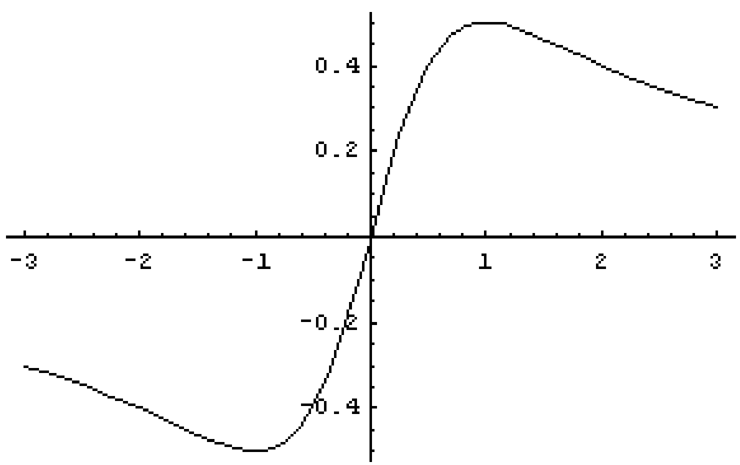
Намиране на минимум и максимум на функцията

$$f[x\_] := \frac{x}{1 + x^2};$$

```
Print["Първата производна на функцията f относно x е f'x = ", ∂x f[x]]
Print["Втората производна на функцията f относно x е f''x = ", ∂x,x f[x]]
Plot[f[x], {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Първата производна на функцията f относно x е $f'_x = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}$

Втората производна на функцията f относно x е $f''_x = \frac{8x^3}{(1+x^2)^3} - \frac{6x}{(1+x^2)^2}$

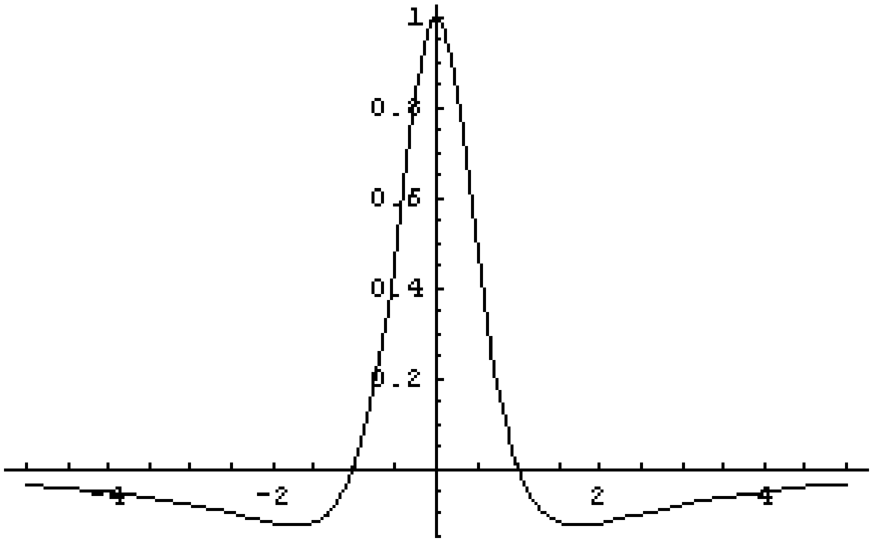


- Graphics -

```
Solve[∂x f[x] == 0]     (* намираме корените на уравнението *)

{{x → -1}, {x → 1}}

Plot[f'[x], {x, -5, 5}, AxesOrigin → {0, 0}]
```




```
- Graphics -

(* запомняне на корените в променливи - в случая те са две на брой *)
x1 = x /. %[[1]];
x2 = x /. %%[[2]];
```

Десислава Стоянова Войникова

```
f2 = f'';
Print["За x = ", x1, " втората производна е y'' = ", f2[x1]]
If[f2[x1] ≠ 0, If [f2[x1] < 0, Print["Функцията има локален максимум в точка x = ", x1, ", y = ", f[x1]],
  Print["Функцията има локален минимум в точка x = ", x1, ", y = ", f[x1]]],
 Print ["При x=0 втората производна е равна на 0 и е възможно да е инфлексна точка, трябва да проверим третата производна - ако
    тя е ненулева, то това е инфлексна точка."]]
Print["За x = ", x2, " втората производна е y'' = ", f2[x2]]
If[f2[x2] ≠ 0, If[f2[x2] < 0, Print["Функцията има локален максимум в точка x = ", x2, ", y = ", f[x2]],
  Print["Функцията има локален минимум в точка x = ", x2, ", y = ", f[x2]]],
 Print ["При x=0 втората производна е равна на 0 и е възможно да е инфлексна точка, трябва да проверим третата производна - ако
    тя е ненулева, то това е инфлексна точка."]]
```

За x = -1 втората производна е y'' = $\frac{1}{2}$

Функцията има локален минимум в точка x = -1, y = $-\frac{1}{2}$

За x = 1 втората производна е y'' = $-\frac{1}{2}$

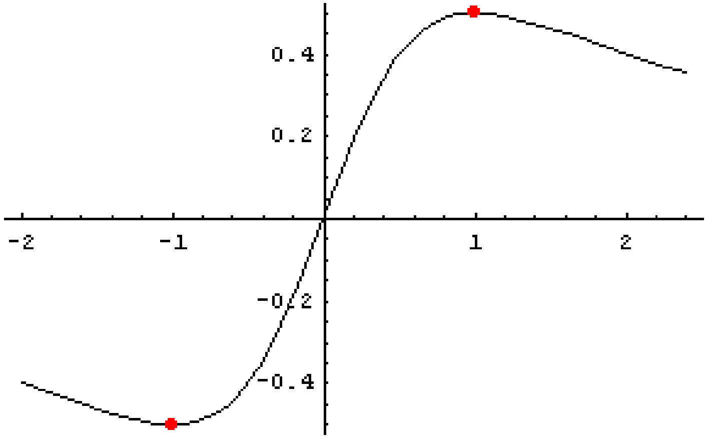
Функцията има локален максимум в точка x = 1, y = $\frac{1}{2}$

```
c = Solve[f'[x] == 0, x]    (* намираме корените на уравнението *)
points = Point[{x, f[x]}] /. c[[{1, 2}]]
```

{{x → -1}, {x → 1}}

$\left\{\text{Point}\left[\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}\right], \text{Point}\left[\left\{1, \frac{1}{2}\right\}\right]\right\}$

```
Plot[f[x], {x, -2, 2.4}, Epilog → {Red, PointSize[.02], points}] (* точките на минимум и максимум *)
```



- Graphics -

(Определяне на интервалите на растене и намаляване на функцията. *)*

```
Print["Функцията е растяща при: ", Reduce[f'[x] > 0, x]]
Print["Функцията е намаляваща при: ", Reduce[f'[x] < 0, x]]
```

Функцията е растяща при: -1 < x < 1

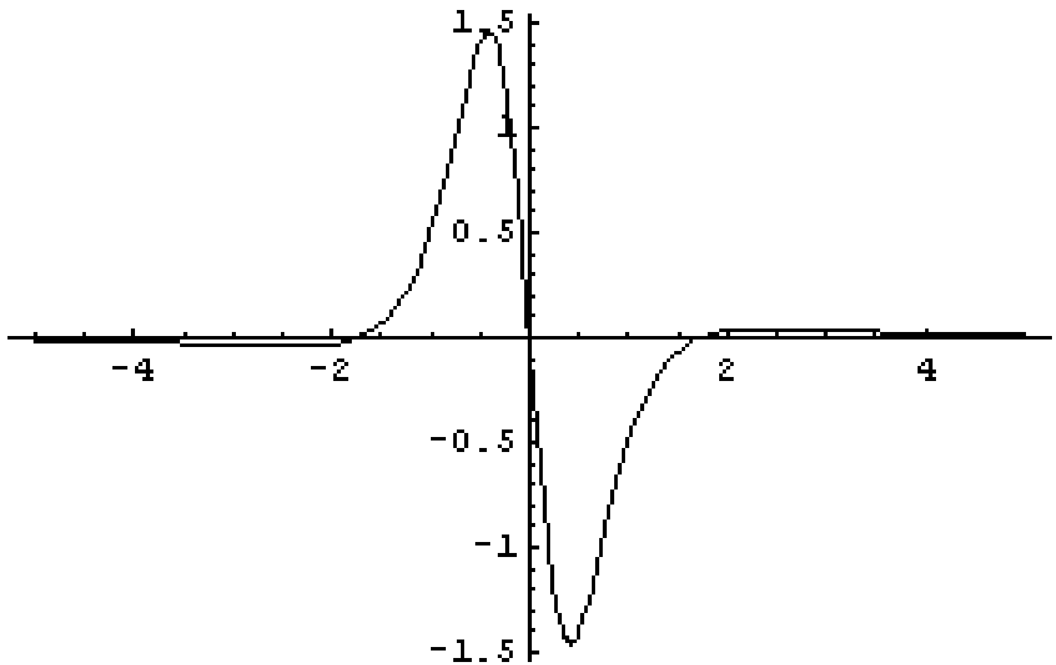
Функцията е намаляваща при: x < -1 || x > 1

Определяне на интервалите на изпъкналост и вдлъбналост на функцията, и инфлексните точки

```
Solve[∂x,x f[x] == 0]
```

$$\{\{x \to 0\}, \{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$$

```
Plot[f''[x], {x, -5, 5}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



- Graphics -

Десислава Стоянова Войникова

```
f1 = f '[x];
f2 = f ''[x];
f3 = f '''[x];
Solve[f2 == 0, x]
x1 = x /. %[[1]];
x2 = x /. %%[[2]];
x3 = x /. %%%[[3]] ;
(* Необходимо и достатъчно условие функцията да има инфлексна точка в точката x=x0 е f''[x0]=0 и f'''[x0]≠0. *)
If[((f2 /. x→x1) == 0) && ((f3 /. x→x1) ≠ 0), Print["Има инфлексна точка с координати: (", x1, ",", f[x1], ")"], Print["Тази точка не е инфлексна!"]]
If[((f2 /. x→x2) == 0) && ((f3 /. x→x2) ≠ 0), Print["Има инфлексна точка с координати: (", x2, ",", f[x2], ")"], Print["Тази точка не е инфлексна!"]]
If[((f2 /. x→x3) == 0) && ((f3 /. x→x3) ≠ 0), Print["Има инфлексна точка с координати: (", x3, ",", f[x3], ")"], Print["Тази точка не е инфлексна!"]]
Print["Изпъкналост при:", Reduce[f2 > 0, x]];
Print["Вдлъбнатост при:", Reduce[f2 < 0, x]];
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$

Има инфлексна точка с координати: (0,0)

Има инфлексна точка с координати: $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$

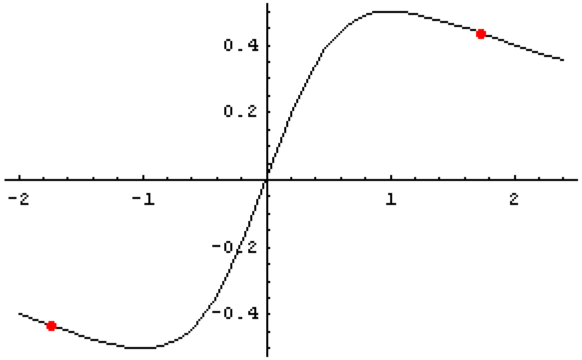
Има инфлексна точка с координати: $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

Изпъкналост при: $-\sqrt{3} < x < 0 \,||\, x > \sqrt{3}$

Вдлъбнатост при: $x < -\sqrt{3} \,||\, 0 < x < \sqrt{3}$

(* Чертаем инфлексните точки на функцията. *)

Plot[f[x], {x, -2, 2.4}, Epilog → {Red, PointSize[.02], Point[{ $-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ }], Point[{ $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ }] }] (* инфлексните точки *)



- Graphics -