Лекция 4

§4. Изследване на функция

1. Растене, намаляване и екстремуми. В тази лекция ще изследваме особеностите на релефа на графиката на дадена функция $f(x)$ в зависимост от поведението на нейната производна. Основните резултати тук са следствия главно от формулата на Тейлър, което още веднъж подчертава нейното особено значение в математическия анализ.

Да припомним, че функцията $f(x)$ се нарича монотонно растяща (намаляваща) в отворения интервал Δ, когато за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$. Ако неравенствата са строги, то функцията се нарича строго монотонно растяща (намаляваща). Някои функции, например линейните, са монотонни над цялата си дефиниционна област. За други, по-сложно устроени функции, дефиниционната област обикновено се разделя на интервали, във всеки от които функцията е монотонно растяща или намаляваща.

Нека $f(x)$ е диференцируема в Δ и $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$. Тогава от теоремата на Лагранж за крайните нараствания имаме $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$, следователно знакът на разликата $f(x_1) - f(x_2)$, който определя монотонността, изцяло зависи от стойностите на производната. По този начин непосредствено се вижда верността на

Твърдение 4.1. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал Δ. Тогава

1) Ако $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$, за всяко $x \in \Delta$, то функцията $f(x)$ е монотонно растяща (намаляваща) в Δ.

2) Ако $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, за всяко $x \in \Delta$, то функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща (намаляваща) в Δ. ■

Например да разгледаме функцията $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (Рис. 4.1).

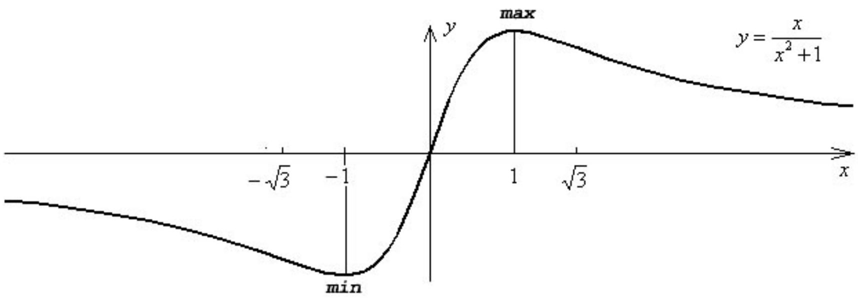

Рис. 4.1.

За производната намираме $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, следователно при $x \in (-1,1)$, функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща, а при $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, функцията $f(x)$ е строго монотонно намаляваща. От тук в частност следва, че в точката $x = -1$ функцията има строг локален минимум, а в точката $x = 1$ има строг локален максимум.

Константите са единствените функции, които са едновременно монотонно растящи и монотонно намаляващи съгласно даденото определение. Естествено, не съществува функция, която да бъде едновременно строго монотонно растяща и строго монотонно намаляваща.

Верността на следното твърдение е очевидна.

Твърдение 4.2. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в някаква δ-околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, на точката x_0 и диференцируема в тази околност, с изключение евентуално на самата точка x_0 (диференцируема във всеки от интервалите $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$). Тогава, ако $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$. Аналогично, ако $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$. ■

Твърдение 4.2 се прилага ефективно, когато екстремалната точка е ъглова или рогова за графиката на $f(x)$. Например за функцията $y = f(x) = \sqrt{|x|}$ в точката $x_0 = 0$ (Рис. 4.2), която е рогова точка и $f'_+(0) = \infty$ и $f'_-(0) = -\infty$.

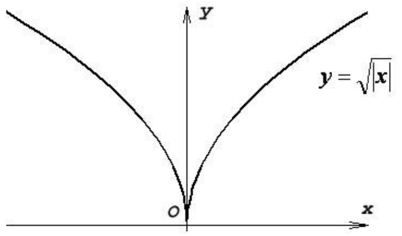

Рис. 4.2.

В този случай, x_0 е точка на строг локален минимум, при което $f(x)$ не е диференцируема в x_0.

Типичната ситуация обаче на строг локален екстремум в дадена точка x_0 е когато функцията е диференцируема в тази точка и можем да приложим теоремата на Ферма, според която в този случай $f'(x_0) = 0$. Анулирането на производната е само необходимо условие за екстремум. Например за функцията $f(x) = x^3$, в точката $x_0 = 0$ имаме $f'(x_0) = 0$, но x_0 не е точка на екстремум. Точките, в които дадена функция е диференцируема и производната се анулира се наричат ***критични*** за функцията. Теоремата на Ферма показва, че локалните екстремуми трябва да се търсят сред критичните точки.

Следващата непосредствена задача е да установим достатъчни условия за проверка дали дадена критична точка е точка на екстремум както и да определим вида на въпросния екстремум.

Твърдение 4.3. Нека x_0 е критична точка за функцията $f(x)$, $f'(x_0) = 0$. Нека освен това $f(x)$ има непрекъсната трета производна в интервала $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta > 0$, и $f''(x_0) \neq 0$. Тогава $f(x)$ има екстремум в x_0, при което:

1) Ако $f''(x_0) > 0$, то x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$.

2) Ако $f''(x_0) < 0$, то x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$.

Доказателство. По формулата на Тейлър, за всяко x от $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имаме

(4.1) $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3,$$

където $\xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Дали x_0 е точка на екстремум зависи от поведението на разликата $f(x) - f(x_0)$ за $x \neq x_0$ в някаква достатъчно малка околност на x_0. За тази разлика, от (4.1) намираме

(4.2) $$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^2}{2}\left[f''(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{3}(x-x_0)\right].$$

По условие третата производна е непрекъсната, следователно $f'''(x)$ е ограничена в затворената δ-околност $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Условието $f''(x_0)\neq 0$ гарантира, че в някаква (евентуално по-малка от първоначалната) δ_1-околност $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$, $\delta \geq \delta_1 > 0$, величината $f''(x_0)+\dfrac{f'''(\xi)}{3}(x-x_0)$ има същия знак като $f''(x_0)$,

$$\operatorname{sign}\left[f''(x_0)+\frac{f'''(\xi)}{3}(x-x_0)\right]=\operatorname{sign} f''(x_0),\ x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1).$$

Нека $f''(x_0)>0$. Тогава съгласно (4.2), за всяко $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ и $x\neq x_0$ ще бъде изпълнено $f(x)-f(x_0)>0$, понеже множителят $(x-x_0)^2>0$, следователно в този случай x_0 се явява точка на строг локален минимум за функцията $f(x)$. Аналогично се получава, че ако $f''(x_0)<0$, то x_0 се явява точка на строг локален максимум. ■

Горното твърдение е частен случай на теорема 4.1, която ще докажем след малко. От друга страна това е най-често прилаганият частен случай и освен това доказателството на тази обща теорема не съдържа нови идейни елементи в сравнение с доказателството на твърдение 4.3 и затова то беше формулирано и доказано отделно.

За илюстрация да намерим локалните екстремуми на функцията $y=f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ от рис. 4.1. Пресмятаме

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ и } f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Критичните точки определяме от уравнението $f'(x)=0$, което има две решения $x_1=-1$ и $x_2=1$. Пресмятаме $f''(-1)=\dfrac{1}{2}$, което означава, че -1 е точка на строг локален минимум и $f''(1)=-\dfrac{1}{2}$, което означава, че 1 е точка на строг локален максимум, което всъщност бяхме установили по други съображения.

Следващата теорема обобщава твърдение 4.3, откривайки възможност за изследване на случаите, когато $f''(x_0)=0$.

Теорема 4.1. Нека за някое естествено число $n\geq 2$ функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до ред $n+1$ в интервала $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta>0$, и нека

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогава

1) Ако числото n е нечетно, то функцията $f(x)$ няма локален екстремум в точката x_0.

2) Ако числото n е четно, то x_0 е точка на локален екстремум, при което

2.1) Ако $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$.

2.2) Ако $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$.

Доказателство. Това доказателство повтаря замисъла на доказателството на твърдение 4.3. По формулата на Тейлър, за всяко x от $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имаме

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+ \tag{4.3}$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

където $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Дали x_0 е точка на екстремум зависи от поведението на разликата $f(x) - f(x_0)$ за $x \neq x_0$ от някаква достатъчно малка околност на x_0. За тази разлика, от (4.3) намираме

$$(4.4) \qquad f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x - x_0)\right].$$

По условие $n+1$-вата производна е непрекъсната, следователно $f^{(n+1)}(x)$ е ограничена в затворената δ-околност $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Условието $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ гарантира, че в някаква евентуално по-малка от първоначалната δ_1-околност $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\delta \geq \delta_1 > 0$, величината $f^{(n)}(x_0) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x - x_0)$ има същия знак като $f^{(n)}(x_0)$,

$$\operatorname{sign}\left[f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x - x_0)\right] = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0), \; x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1).$$

1) Да разгледаме случая, когато числото n е четно. Нека $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогава съгласно (4.4), за всяко $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ и $x \neq x_0$ ще бъде изпълнено $f(x) - f(x_0) > 0$, понеже множителят $(x - x_0)^n > 0$, следователно в този случай x_0 се явява точка на строг локален минимум за функцията $f(x)$. Аналогично се получава, че ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 се явява точка на строг локален максимум.

2) Нека сега n е нечетно. И в този случай вторият множител от дясната страна на (4.4) не си сменя знака, когато $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Тук обаче първият множител $(x - x_0)^n$ има различен знак от двете страни на x_0, $(x - x_0)^n > 0$ за $x > x_0$ и $(x - x_0)^n < 0$ за $x < x_0$. Следователно разликата $f(x) - f(x_0)$ сигурно има различен знак от двете страни на x_0 и тази точка не може да бъде точка на локален екстремум. ■

Ако точката x_0 попада в клаузата **1**) на теорема 4.1, то x_0 се явява частен случай на ***инфлексна*** точка.

За илюстрация на теорема 4.1, да разгледаме функциите $y = f(x) = x^3$ и $y = g(x) = x^4$ в точката $x_0 = 0$ (Рис. 4.3)

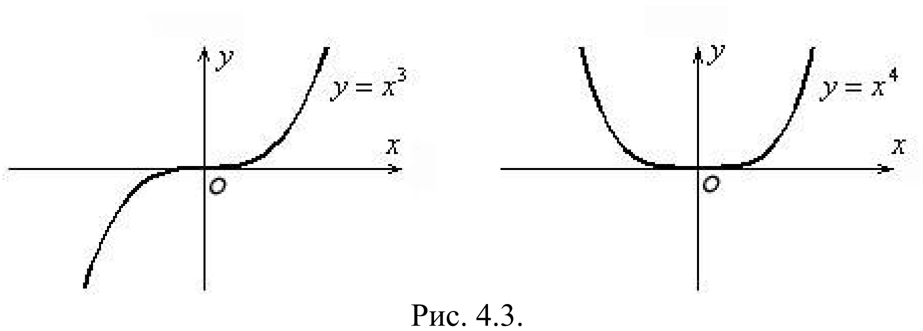

Рис. 4.3.

В първия случай имаме $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 6 \neq 0$. Тук $n = 3$ е нечетно и x_0 не е точка на локален екстремум. Във втория случай имаме $g'(x_0) = g''(x_0) = g'''(x_0) = 0$, $g^{(4)}(x_0) = 24 \neq 0$. Тук $n = 4$ е четно и освен това $g^{(4)}(x_0) > 0$, следователно x_0 е точка на строг локален минимум.

2. Изпъкнали функции. Съществуват различни определения за изпъкнали функции. В някакъв смисъл всичките тези определения са еквивалентни, но не се покриват напълно. Тук ще приведем геометрично определение, използващо взаимното разположение на графиката на дадена функция и допирателните към нея, което означава, че по необходимост ще изискваме разглежданите функции да бъдат диференцируеми.

Определение 4.1. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в околност на точката x_0. Казва се, че $f(x)$ е изпъкнала надолу (нагоре) в x_0, когато в някаква (евентуално по-малка от изходната) околност на x_0 графиката на $f(x)$ лежи над (под) допирателната за x_0. Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал Δ и е изпъкнала надолу (нагоре) във всяка точка $x_0 \in \Delta$, то се казва, че $f(x)$ е изпъкнала надолу (нагоре) в интервала Δ.

На рис. 4.4 е изобразена функция, която е изпъкнала надолу в интервала (a,b).

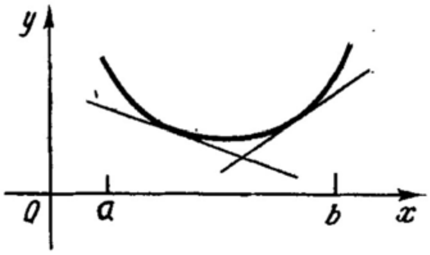

Рис. 4.4.

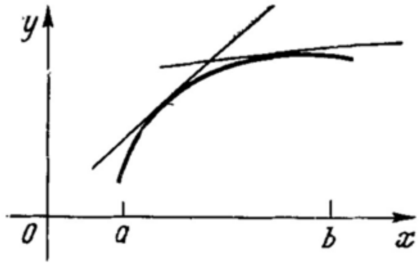

Рис. 4.5.

Функцията $y = e^x$ също е изпъкнала надолу в дефиниционната си област $x \in \mathbb{R}$.

На рис. 4.5 е изобразена функция, която е изпъкнала нагоре в интервала (a,b). Функцията $y = \ln x$ също е изпъкнала нагоре в дефиниционната си област $x > 0$.

Ако функцията $f(x)$ е изпъкнала надолу (нагоре) в точката x_0 и в някаква околност на x_0 единствената обща точка между графиката на $f(x)$ и допирателната за $x = x_0$ е точката $M_0(x_0, f(x_0))$, то се казва, че $f(x)$ е ***строго изпъкнала*** надолу (нагоре) в точката x_0. Ако функцията $f(x)$ е строго изпъкнала надолу (нагоре) във всяка точка от интервала Δ, то се казва, че $f(x)$ е строго изпъкнала надолу (нагоре) в Δ. Типичният случай на изпъкналост на дадена функция е строгата изпъкналост.

Линейните функции са единствените, които са едновременно изпъкнали надолу и изпъкнали нагоре. Естествено, не съществува функция, която да бъде едновременно строго изпъкнала надолу и строго изпъкнала нагоре.

Уравнението на допирателната за $x = x_0$ е $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, следователно изпъкналостта на функцията зависи от знака на разликата $f(x) - t(x)$. Ако в някаква околност на x_0 имаме $f(x) - t(x) \geq 0$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала надолу в точката x_0 и ако $f(x) - t(x) \leq 0$ в някаква околност на x_0, то функцията $f(x)$ е изпъкнала нагоре в точката x_0. Знакът на тази разлика също се изследва с помощта на формулата на Тейлър. Съгласно тази формула, ако $f(x)$ има непрекъсната втора производна в някаква околност на x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = t(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2,$$

за някое ξ между x_0 и x, следователно разликата $f(x) - t(x)$, можем да запишем във вида

(4.5) $\quad f(x) - t(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$

От представянето (4.5) фактически следват всичките достатъчни условия за изпъкналост.

Твърдение 4.4. Нека $f(x)$ има непрекъсната втора производна в околност на точката x_0, при което $f''(x_0)>0$ $\left(f''(x_0)<0\right)$. Тогава функцията $f(x)$ е ***строго*** изпъкнала надолу (нагоре) в точката x_0.

Доказателство. Нека $f''(x_0)>0$. Тогава, поради непрекъснатостта на $f''(x)$ в x_0, всичките стойности на втората производна в някаква цяла околност на x_0 ще бъдат положителни. Сега от (4.5) следва, че в същата околност ще имаме $f(x)-t(x)\geq 0$, при което равенството ще е налице само за $x=x_0$, което означава по определение, че $f(x)$ е строго изпъкнала надолу в точката x_0. Другият случай се изследва аналогично. ■

От твърдение 4.4 веднага следва, че ако $f''(x_0)>0$ $\left(f''(x_0)<0\right)$, за всяко x_0 от интервала Δ, то функцията $f(x)$ се явява строго изпъкнала надолу (нагоре) в Δ.

По същия начин се доказва и

Твърдение 4.5. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната втора производна в интервала Δ, при което $f''(x)\geq 0$ $\left(f''(x)\leq 0\right)$, за всяко $x\in\Delta$. Тогава $f(x)$ е изпъкнала надолу (нагоре) в Δ. ■

Да се върнем към формулата на Тейлър

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\cdots.$$

Както знаем, събираемите от нулев и първи ред формират допирателната линия $t(x)$ към графиката на функцията в точката $M_0(x_0,f(x_0))$ (Рис. 4.6),

$$t(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

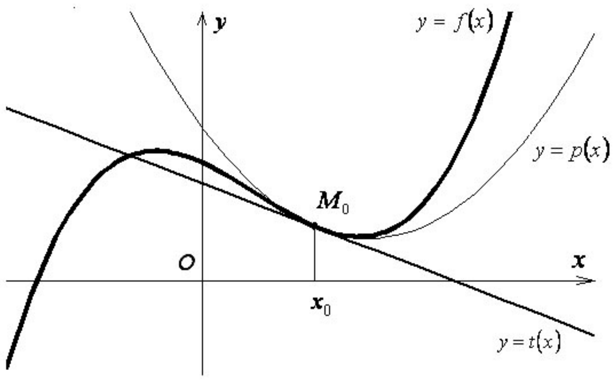

Рис. 4.6.

Ако добавим и събираемото от втори ред, ще получим уравнението на допирателната парабола

$$p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,$$

която е истинска парабола, само ако $f''(x_0)\neq 0$. Линейните функции имат характерно поведение относно монотонността. Една линейна функция е навсякъде монотонно растяща или навсякъде монотонно намаляваща. Квадратните функции имат характерно поведение относно изпъкналостта. Ако $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, е квадратна функция, то $y''=2a=const$, следователно при $a>0$ квадратната функция е навсякъде строго изпъкнала надолу, а при $a<0$, е навсякъде строго изпъкнала нагоре. От рис. 4.6 се вижда, че в точката x_0 функцията $f(x)$ е строго намаляваща, понеже допирателната права е графика на функция със същото свойство и е строго изпъкнала надолу, понеже допирателната парабола е графика на функция със същото свойство. Ако $f''(x_0)=0$, то допирателната парабола се изражда в допирателна права. Ако x_0 е точка на строг локален екстремум, то M_0 се явява връх на допирателната парабола и нейният вид напълно съответства на вида на екстремума. В този случай x_0 се явява точка на строг локален екстремум и за $p(x)$.

Инфлексните точки се отнасят към изпъкналостта по същия начин, както екстремумите се отнасят към монотонността.

Определение 4.2. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в околност на точката x_0. Казва се, че x_0 е инфлексна точка за $f(x)$, когато $f(x)$ не е нито изпъкнала надолу нито изпъкнала нагоре в точката x_0.

От определението и от твърдение 4.4 веднага следва верността на

Твърдение 4.6. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната втора производна в околност на точката x_0 и нека x_0 е инфлексна за $f(x)$. Тогава $f''(x_0)=0$. ■

Ако обаче $f''(x_0)=0$, от това все още не следва, че x_0 е инфлексна точка. Например за функцията $f(x)=x^4$ имаме $f''(0)=0$, но точката $x_0=0$ не е инфлексна за $f(x)$, понеже $f(x)$ очевидно е навсякъде строго изпъкнала надолу.

Теорема 4.2. Нека за някое естествено число $n\geq 2$ функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до ред $n+1$ в интервала $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta>0$, и нека

$$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

при $n\geq 3$ или $f^{(2)}(x_0)=f''(x_0)\neq 0$ при $n=2$. Тогава

1) Ако числото n е нечетно, то x_0 е инфлексна точка за функцията $f(x)$.

2) Ако числото n е четно, то x_0 е точка на изпъкналост, при което

2.1) Ако $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)$ е строго изпъкнала надолу в x_0.

2.2) Ако $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x)$ е строго изпъкнала нагоре в x_0.

Доказателство. Това доказателство повтаря по същество идеята на доказателството на теорема 4.1. По формулата на Тейлър, за всяко x от $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имаме

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+ \\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{4.6}$$

където $\xi\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Дали x_0 е инфлексна точка или точка на изпъкналост зависи от поведението на разликата $f(x)-t(x)$ за $x\neq x_0$ от някаква достатъчно малка околност на x_0. За тази разлика, от (4.6) намираме

$$f(x)-t(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-x_0)\right]. \tag{4.7}$$

Както при доказателството на теорема 4.1 установяваме, че за x от някаква (евентуално по-малка от първоначалната) δ_1-околност $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$, $\delta\geq\delta_1>0$,

$$\operatorname{sign}\left[f^{(n)}(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-x_0)\right]=\operatorname{sign} f^{(n)}(x_0).$$

1) Да разгледаме случая, когато числото n е четно. Нека $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогава съгласно (4.7), за всяко $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ и $x\neq x_0$ ще бъде изпълнено $f(x)-t(x)>0$, понеже множителят $(x-x_0)^n>0$, следователно в този случай функцията е строго изпъкнала надолу в точката x_0. Аналогично се получава, че ако $f^{(n)}(x_0)<0$, то функцията е строго изпъкнала нагоре в x_0.

2) Нека сега n е нечетно. И в този случай вторият множител от дясната страна на (4.7) не си сменя знака, когато $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$. Тук обаче първият множител $(x-x_0)^n$ има различен знак от двете страни на x_0, $(x-x_0)^n>0$ за $x>x_0$ и $(x-x_0)^n<0$ за $x<x_0$. Следователно разликата $f(x)-t(x)$ сигурно има различен знак от двете страни на x_0, което означава, че точката x_0 е инфлексна за функцията $f(x)$. ■

Например да разгледаме функцията $f(x)=x^4$ и точката $x_0=0$, за която имаме, $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, $f^{(4)}(x_0)=24\neq 0$. Тук $n=4$ е четно и освен това $g^{(4)}(x_0)>0$, следователно $f(x)$ е строго изпъкнала надолу в точката x_0.

Типичната ситуация на инфлексна точка е, когато $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$.

3. Асимптоти. Ако е налице някое от условията

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty,$$

то се казва, че правата $x=x_0$ е ***вертикална аисмптота*** за графиката на функцията $f(x)$. Например да разгледаме функцията $y=\frac{x^3}{(x+1)^3}$ (Рис. 4.7).

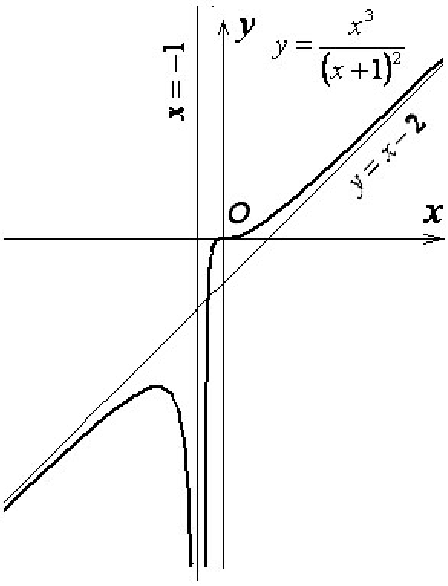

Рис. 4.7.

В този случай правата $x=-1$ е вертикална асимптота, понеже

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty.$$

Също така правата $x = 0$ е вертикална асимптота за графиката на функцията $y = \frac{1}{x}$ и за графиката на функцията $y = \ln x$, понеже

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +0} \ln x = -\infty .$$

Определение 4.3. Правата $y = kx + b$ се нарича наклонена асимптота за графиката на функцията $y = f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, когато

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad \left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \right).$$

Ако $k = 0$, то асимптотата се нарича хоризонтална.

От определението следва, че

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

и ако такова k съществува, то

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx].$$

За примера от рис. 4.7 имаме

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2 .$$

Следователно правата $y = x - 2$ е наклонена асимптота за графиката на функцията при $x \to \infty$. Същата права е наклонена асимптота за графиката на функцията и при $x \to -\infty$.

В общия случай една функция може да има различни асимптоти при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$.