# 1 Теория на автоматите и формалните езици

## 1.1 Въведение

# Дуалност: Граматики ↔ Машини

Граматиките генерират думи.

Машините приемат/разпознават думи.

# Пример: Аритметични изрази: $\mathtt{EXPR}$

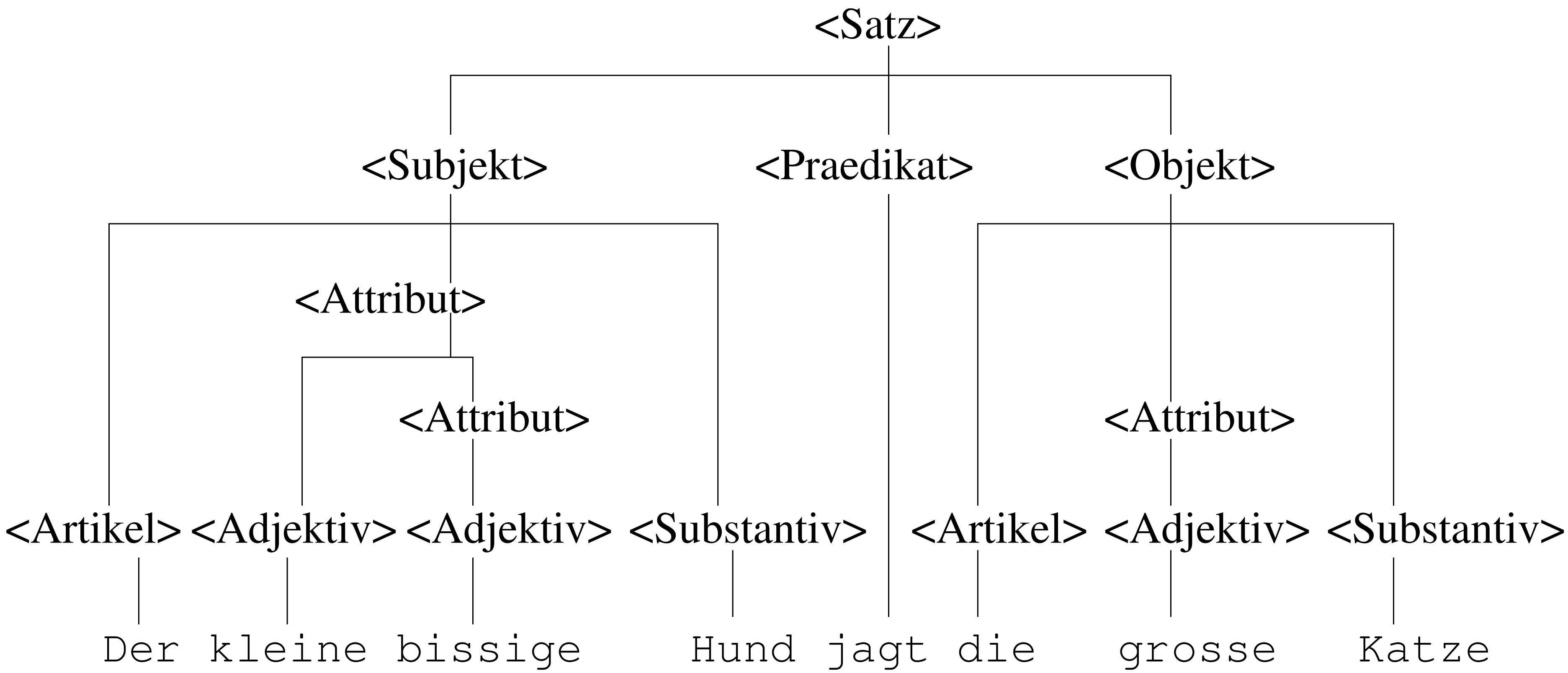
$$\Sigma = \{a, +, -, *, /, (, )\}$$

$a$ е променлива за константи или променливи

$$(a-a)*a+a/(a+a)-1 \in \mathtt{EXPR}$$
$$(((a))) \in \mathtt{EXPR}$$
$$((a+)-a( \notin \mathtt{EXPR}$$

Как да го формализираме?

# Пример: Немската граматика




Поне част от структурата можем да представим с контекстно свободна граматика

### 1.1.1 Граматики

Граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

- $V$, Променливи
- $\Sigma$, Азбука на терминалите $(V \cap \Sigma = \emptyset)$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^{+} \times (V \cup \Sigma)^{*}$, Правила, $|P| < \infty$
  Всяка лява част на правило съдържа поне една променлива
- $S$, начална променлива

## Пример: Аритметични изрази

$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (, )\}, P, E)$, където

$$\begin{aligned}
P = \{E &\to T,\\
E &\to E + T,\\
T &\to F,\\
T &\to T * F,\\
F &\to a,\\
F &\to (E)\}
\end{aligned}$$

# Релация за преход $\Rightarrow$

Дадена е граматиката $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$u \Rightarrow_G v$ е изпълнено, ако

$u = xyz \in (V \cup \Sigma)^*$,

$v = xy'z \in (V \cup \Sigma)^*$,

$y \to y' \in P$.

"‘$u$ отива директно в $v$."’

Индекса $_G$ ще пропускаме, когато е ясно за коя граматика става дума.

Релации за преход $\stackrel{*}{\Rightarrow}, \stackrel{n}{\Rightarrow}$

Дължина на извод :

$\forall u \in (V \cup \Sigma)^* : u \stackrel{0}{\Rightarrow} u$

$\forall u, v, w \in (V \cup \Sigma)^* : u \Rightarrow v \wedge v \stackrel{n}{\Rightarrow} w \longrightarrow u \stackrel{n+1}{\Rightarrow} w$

Извод:

$\exists n \geq 0 : u \stackrel{n}{\Rightarrow} v \longrightarrow u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$

Наблюдение: $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на $\Rightarrow$.

$u \stackrel{*}{\Rightarrow}_G v$ означава "'$v$ е изводима от $u$"'

# Езикът генериран от $G = (V, \Sigma, P, S)$

$$L(G) := \left\{ w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}$$

# Извод

Редицата от думи,

$$(\underbrace{w_1}_{=S}, \underbrace{w_2}_{\in(\Sigma\cup V)^*}, \dots, \underbrace{w_{n-1}}_{\in(\Sigma\cup V)^*}, \underbrace{w_n}_{\in\Sigma^*})$$

се нарича извод на $w_n$, ако

$w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$.

Пример:

$$
\begin{array}{l|l}
E \Rightarrow & E \to E+T \\
\Rightarrow E+T & E \to T \\
\Rightarrow T+T & T \to T*F \\
\Rightarrow T*F+T & T \to T*F \\
\Rightarrow T*F*F+T & T \to F \\
\Rightarrow F*F*F+T & F \to a \\
\Rightarrow a*F*F+T & F \to a \\
\Rightarrow a*a*F+T & F \to (E) \\
\Rightarrow a*a*(E)+T & E \to E+T \\
\Rightarrow a*a*(E+T)+T & E \to T \\
\Rightarrow a*a*(T+T)+T & T \to F \\
\Rightarrow a*a*(F+T)+T & F \to a \\
\Rightarrow a*a*(a+T)+T & T \to F \\
\Rightarrow a*a*(a+F)+T & F \to a \\
\Rightarrow a*a*(a+a)+T & T \to F \\
\Rightarrow a*a*(a+a)+F & F \to a \\
\Rightarrow a*a*(a+a)+a &
\end{array}
$$

### 1.1.2 Йерархия на Чомски

- Елегантна спецификация за езици
- Класификация на езици

## Класификация на граматики

$G = (V, \Sigma, P, S)$ [Ноам Чомски, 1956]

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$\forall \ell \to r \in P:$

**Тип 0:** всякакви правила

**Тип 1, контекстно зависими:** $|\ell| \leq |r|$

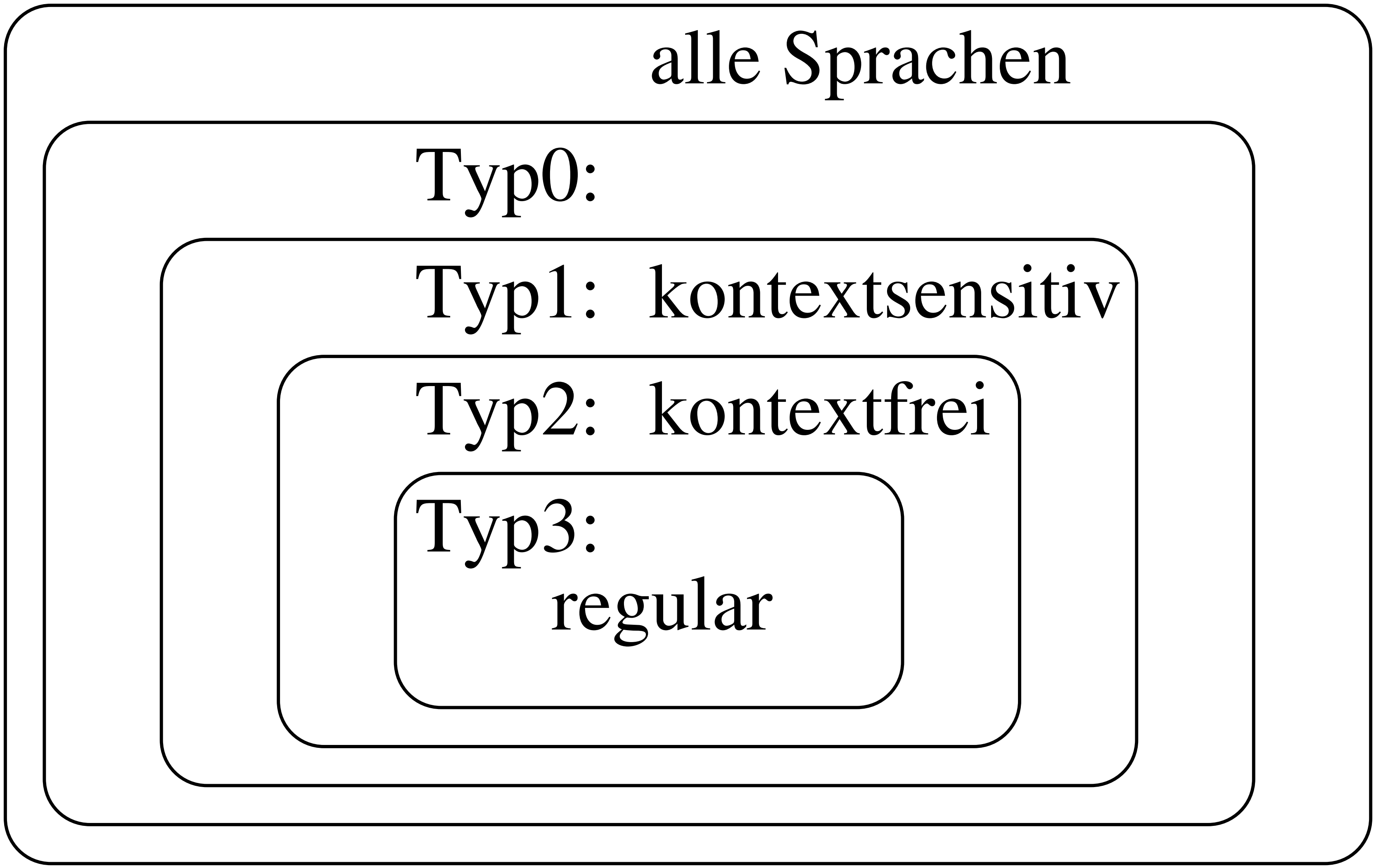
Специални правила: $S \to \varepsilon$ се допуска, ако $S \notin r$,

Внимание: в литературата не е унифицирано!

**Тип 2, контекстно свободна:** Тип 1 и $\ell \in V$ $A \to \varepsilon$ се допуска

**Тип 3, регулярни:** Тип 2 и $r \in \Sigma \cup \Sigma V$

Йерархия на Чомски



# Пример: Тип 3

$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, P, A)$, където

$$
\begin{aligned}
P = \{A &\to aA, \\
A &\to aB, \\
B &\to bB, \\
B &\to b\}
\end{aligned}
$$

Твърдение: $L(G) = \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Доказателство - основен метод:

1. $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$
2. $L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Винаги с пълна индукция

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Доказателство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в детайли

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \overset{*}{\Rightarrow} a^n B$

$n = 1$: $A \to aB \in P$

$n \rightsquigarrow n+1$: $A \to aA \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}} aa^n B = a^{n+1} B$

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Доказателство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в детайли

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \overset{*}{\Rightarrow} a^n B$

Лема 2: $\forall m \geq 1 : B \overset{*}{\Rightarrow} b^m$

$m = 1$: $B \to b \in P$

$m \rightsquigarrow m+1$: $B \to bB \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}} bb^m = b^{m+1}$

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Доказателство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в детайли

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \overset{*}{\Rightarrow} a^n B$

Лема 2: $\forall m \geq 1 : B \overset{*}{\Rightarrow} b^m$

Доказателство $\supseteq$: $\forall n \geq 1, m \geq 1 : A \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{\text{Лема 1}} a^n B \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{\text{Лема 2}} a^n b^m$

така $a^n b^m \in L(G)$ (Деф. $L(G)$)

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, A \to a, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Доказателство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

$$A \underbrace{\overset{n-1}{\Rightarrow}}_{A \to aA} a^{n-1}A \Rightarrow a^n B \underbrace{\overset{m-1}{\Rightarrow}}_{B \to bB} a^n b^{m-1} B \Rightarrow a^n b^m$$

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Доказателство: $L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Индукция по дължината на извода $\ell$: (По-силно)

Индукционно предоположение : $\forall \alpha \in (V \cup \Sigma)^* : A \overset{\leq \ell}{\Rightarrow} \alpha \longrightarrow$
$\alpha \in \{a\}^* \cdot A \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+$

$\ell = 0$: $A \in \{a\}^* \cdot A$

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1$: Да разлгедаме извода $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha' \overbrace{\Rightarrow}^{C \to \beta} \alpha$

| $\alpha'$ | $C \to \beta$ | $\alpha$ | $\longrightarrow \alpha \in$ |
|---|---|---|---|
| $a^n A$ | $A \to aA$ | $a^{n+1} A$ | $\{a\}^+ \cdot A$ |
| $a^n A$ | $A \to aB$ | $a^{n+1} B$ | $\{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B$ |
| $a^n b^m B$ | $B \to bB$ | $a^n b^{m+1} B$ | $\{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B$ |
| $a^n b^m B$ | $B \to b$ | $a^n b^{m+1}$ | $\{a\}^+ \cdot \{b\}^+$ |

■

Д-во : $L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Ако $A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$, то $\alpha \in \{a\}^* \cdot A \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+$.

Изводите запазват тази

инварианта. ■

$$\boxed{G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}, A)}$$

Твърдение:

Езиците, разпознавани от DFA са от Чомски тип 3

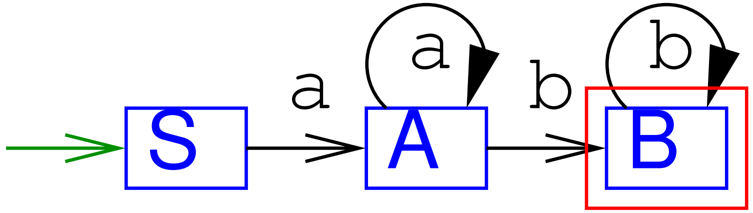
Нека $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ е DFA.

Да разгледаме граматиката $G = (Z, \Sigma, P, S)$, където

$$P = \{Q \to aQ' : \delta(Q,a) = Q'\} \cup$$
$$\{Q \to a : \delta(Q,a) = Q' \in F\} \cup$$
$$\{S \to \varepsilon : S \in F\} \quad .$$

тогава $L(G) = L(A)$

Пример: $\{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$




$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

| $q$ | $c$ | $\delta(q,c)$ | $\in P$ |
|---|---|---|---|
| $S$ | $a$ | $A$ | $S \to aA$ |
| $A$ | $a$ | $A$ | $A \to aA$ |
| $A$ | $b$ | $B$ | $A \to bB, A \to b$ |
| $B$ | $b$ | $B$ | $B \to bB, B \to b$ |

А $\delta(S, b)$?

# Езиците, разпознавани от DFA са от Чомски тип 3

Нека $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ е DFA.

Да разгледаме граматиката $G = (Z, \Sigma, P, S)$, където

$$
\begin{aligned}
P = & \left\{Q \to aQ' : \delta(Q,a) = Q'\right\} \cup \\
& \left\{Q \to a : \delta(Q,a) = Q' \in F\right\} \cup \\
& \{S \to \varepsilon : S \in F\} \quad .
\end{aligned}
$$

тогава $L(G) = L(A)$.

Идея: $\exists$ една 1-1 релация между

изводите $S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ и

DFA изчисляващите пътища $S \stackrel{w_1}{\Rightarrow} A_1 \stackrel{w_2}{\Rightarrow} A_2 \stackrel{w_3}{\Rightarrow} \cdots \stackrel{w_n}{\Rightarrow} f \in F$.

Д-во: $L(G) = L(A)$:

Ако $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \to \varepsilon \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A)$

$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$, $G = (Z, \Sigma, P, S)$ и $P = \{Q \to aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \{Q \to a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \{S \to \varepsilon : S \in F\}$

Д-во (скица) $L(G) = L(A)$ Ако $|w| = n$, $n > 0$:

$w_1 \cdots w_n \in L(G)$

$$\Leftrightarrow S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w_1 \cdots w_n$$

$$\Leftrightarrow \{S \rightarrow w_1 A_1, A_1 \rightarrow w_2 A_2, \ldots, A_{n-2} \rightarrow w_{n-1} A_{n-1}, A_{n-1} \rightarrow w_n\} \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow \delta(S, w_1) = A_1, \delta(A_1, w_2) = A_2, \ldots, \delta(A_{n-1}, w_n) = A_n \in F$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{изчислителен път } S \stackrel{w_1}{\Rightarrow} A_1 \stackrel{w_2}{\Rightarrow} A_2 \stackrel{w_3}{\Rightarrow} \cdots A_{n-1} \stackrel{w_n}{\Rightarrow} A_n \in F$$

$$\Leftrightarrow w_1 \cdots w_n \in L(A)$$

(В 2 посоки ‘$\Leftrightarrow$’ ) ■

винаги се доказва

$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$, $G = (Z, \Sigma, P, S)$ и $P = \{Q \rightarrow aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \{Q \rightarrow a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon : S \in F\}$

Тип-3→NFA

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е гарматика от тип 3.

Да разгледаме NFA

$A = (V \cup \{f\}, \Sigma, \delta, S, \{f\} \cup \{S : S \to \varepsilon \in P\})$, където

$$\delta = \{(q, a, q') : q \to aq' \in P\} \cup$$
$$\{(q, a, f) : q \to a \in P\}$$

(Релационно означение за $\delta$).

Има 1-1 релация между изводите от вида

$S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ в $G$ и

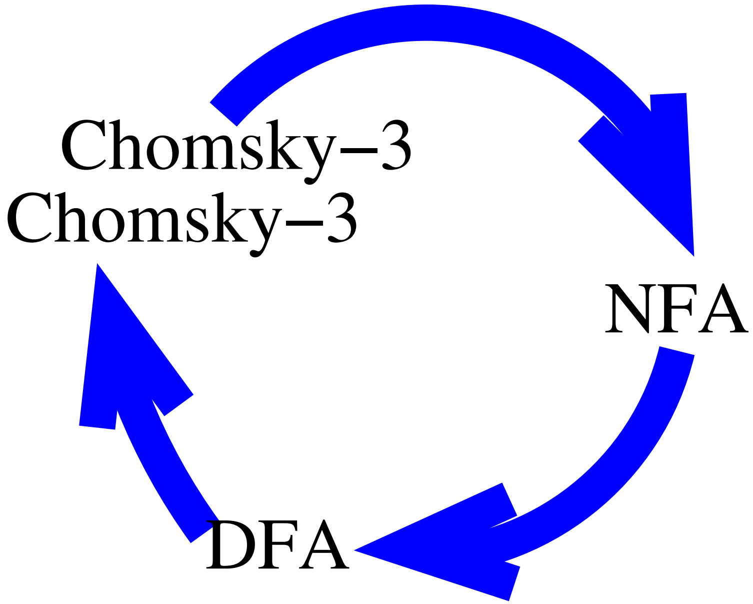
приемащите пътища от вида

$S \overset{w_1}{\to} A_1 \overset{w_2}{\to} A_2 \overset{w_3}{\to} \cdots \overset{w_n}{\to} f$ с $A$.

Следователно $L(A) = L(G)$.

Еднозначни гарматики от тип-3

Твърдение: $\forall L \in$ type-3 $: \exists$ type-3 граматика с еднозначни изводи.




Д-во : Нека $A$ е DFA и $L(A) = L$.

Съответната граматика от тип-3 за $A$ има еднозначни изводи.

## Пример: Тип 2 (Аритметични изрази)

$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (, )\}, P, E)$ с

$$\begin{aligned} P = \{ & E \to T, \\ & E \to E + T, \\ & T \to F, \\ & T \to T * F, \\ & F \to a, \\ & F \to (E) \} \end{aligned}$$

## Пример: Тип 2

$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to ab, S \to aSb\}, S)$.

$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

Д-во $L(G) \supseteq \{a^n b^n : n \geq 1\}$:

$S \overset{n-1}{\Rightarrow} a^{n-1} S b^{n-1} \Rightarrow a^n b^n$. ■

Д-во $L(G) \subseteq \{a^n b^n : n \geq 1\}$:

$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha \longrightarrow \alpha \in \left\{a^k S b^k : k \geq 0\right\} \cup \{a^n b^n : n \geq 1\}$

(Инварианта) ■

## Пример: Тип 1

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aSBC, \\ S &\to aBC, \\ CB &\to BC, \\ aB &\to ab, \\ bB &\to bb, \\ bC &\to bc, \\ cC &\to cc\} \end{aligned}$$

Твърдение: $L(G) = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$

## Пример

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}BC \Rightarrow aa\underline{S}BCBC \Rightarrow aaaB\underline{CB}CBC$$
$$\Rightarrow aaaBBC\underline{CB}C \Rightarrow aaaBB\underline{CB}CC \Rightarrow aa\underline{aB}BBCCC$$
$$\Rightarrow aaa\underline{bB}BCCC \Rightarrow aaab\underline{bB}CCC \Rightarrow aaabb\underline{bC}CC$$
$$\Rightarrow aaabbb\underline{cC}C \Rightarrow aaabbbc\underline{cC} \Rightarrow aaabbbccc$$

$$\boxed{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc}$$

Д-во за $a^n b^n c^n \subseteq L(G)$

| | |
|---|---|
| $S \overset{n-1}{\Rightarrow} a^{n-1} S (BC)^{n-1}$ | $(S \to aSBC)$ |
| $\Rightarrow a^n (BC)^n$ | $(S \to aBC)$ |
| $\underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{\text{Лема S}} a^n B^n C^n$ | $(CB \to BC)$ |
| $\Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n$ | $(aB \to ab)$ |
| $\overset{n-1}{\Rightarrow} a^n b^n C^n$ | $(bB \to bb)$ |
| $\Rightarrow a^n b^n c C^{n-1}$ | $(bC \to bc)$ |
| $\overset{n-1}{\Rightarrow} a^n b^n c^n$ | $(cC \to cc)$ |

Упражнение: Проверете всичките части

# Лексикографска наредба

Нека $\alpha, \beta \in \Sigma^*$

$\forall \alpha \in \Sigma^* : \varepsilon \leq \alpha$

$a\alpha \leq b\beta$ т.т.к. $a < b$ или $a = b$ и $\alpha \leq \beta$ $(a, b \in \Sigma;\ \alpha, \beta \in \Sigma^*)$

Наблюдение: $\leq$ дефинира пълна (линейна) наредба

Д-во: упражнение?

Пример: $\varepsilon < \mathtt{a} < \mathtt{aa} < \mathtt{ab} < \mathtt{b} < \mathtt{ba} < \mathtt{bb}$

- Аналогично за наредени $n$-ки
- Можем да правим доказателства по индукция в едно линейно (тотално) наредено крайно множество от крайни редици от думи.

Лема S: $(BC)^n \overset{*}{\Rightarrow} B^n C^n$ с помощта на $CB \to BC$

Доказателство с индукция по лексикографската наредба на $\left\{ w \in \{B, C\}^{2n} : w \text{ съдържа един и същи брой } B \text{ и } C \right\}$

$\alpha$ минимален $\longrightarrow \alpha = B^n C^n$

$\alpha$ не е минимален $\longrightarrow$

$$\alpha = \gamma CB\beta$$

$$\Rightarrow \gamma BC\beta \qquad \text{е по-малко!}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} B^n C^n \qquad \text{ИП}$$

■

Упражнение: Покажете, че няма минимална дума $\alpha$ от вида $\gamma CB\beta$. Следващо упражнение: Колко дълъг е извода като функция на $n$?

Доказателство: $L(G) \subseteq a^n b^n c^n$

Инварианта: $\#a = \#(b, B) = \#(c, C)$
В частност: $\forall w \in L(G) : \#a = \#b = \#c$.

Остава да видим, че $L(G) \subseteq a^* b^* c^*$.

Всички $a$-та се появяват преди всяко $b$ и $c$.
$(S \to aSBC, S \to aBC)$

Първото $b$ следва след полследното $a$. $(aB \to ab)$

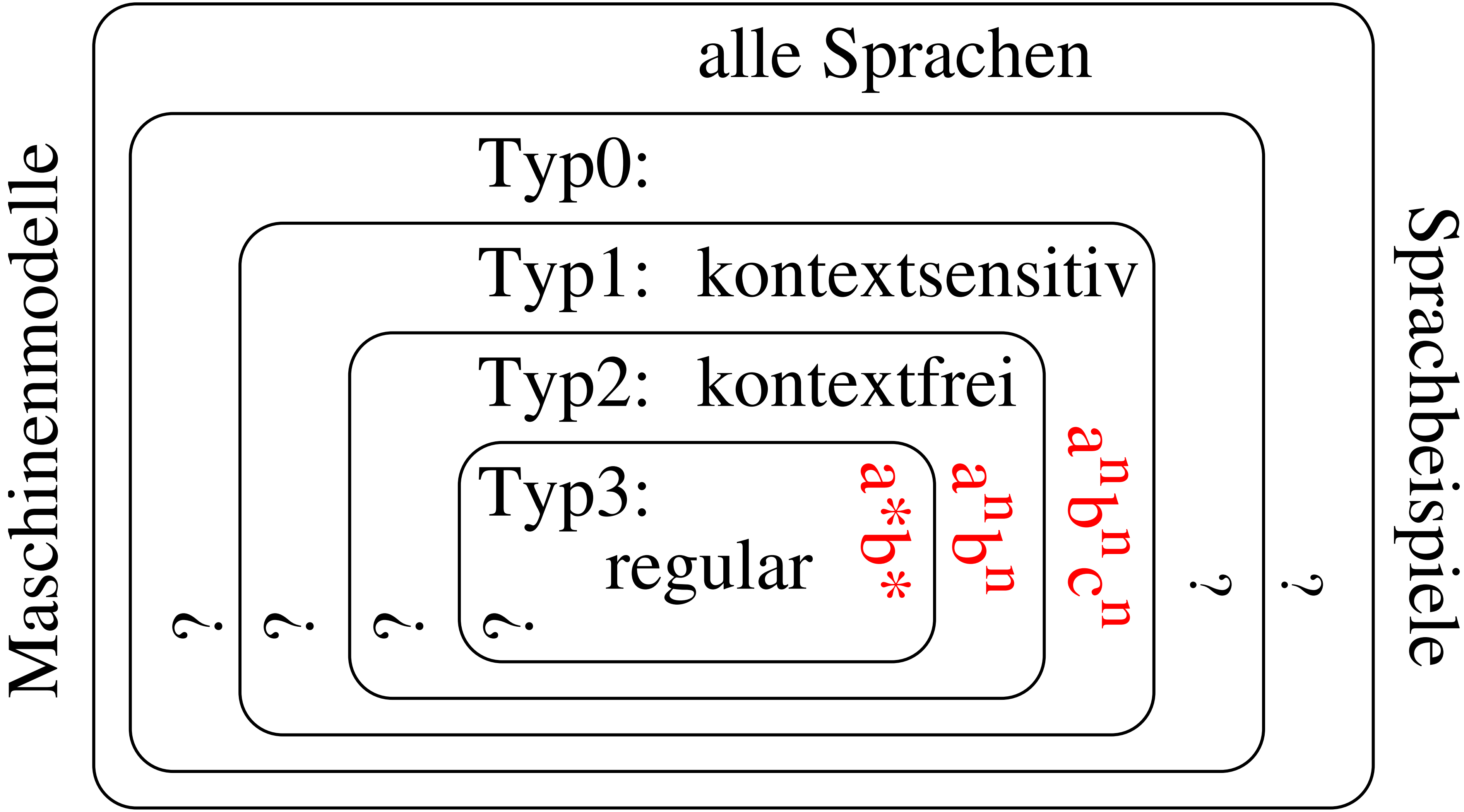
Следващото появяващо се $b$ е след всичките $b$-та.
$(bB \to bb)$

Първото $c$ следва след последното $b$. $(bC \to bc)$

Следавщото $c$ следва съществуващите $c$-та. $(cC \to cc)$

$\boxed{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc}$

## Йерархия на Чомски



# План

- Ще разгледаме за всеки тип граматика $\leftrightarrow$ един машинен модел
- Ще покажем примери за езици, които не са от по-простите типове граматики
- Един пример за граматика от тип 0
- Алгоритми и стандартни техники за доказателства на стандартните алгоритмични проблеми.

### 1.1.3 Проблемът за принадлежност на дума

Основният проблем за формалните езици:

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$

Въпрос: $w \in L(G)$?

$(\Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w?)$

Проблемът за принадлежност на дума към език от тип 1

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$
Въпрос: $w \in L(G)$?

Да разгледаме един краен граф $H = (U, E)$, където
$U = \{x \in (\Sigma \cup V)^* : |x| \leq |w|\}$ и
$E = \{(x, y) : x \Rightarrow_G y\}$.

$w \in L(G)$ т.т.к. $w$ е в $H$ и е достижима от $S$.

Следствие:
Проблемът за принадлежност на дума на езици от тип 1
е разрешим алгоритмично за крайно време.

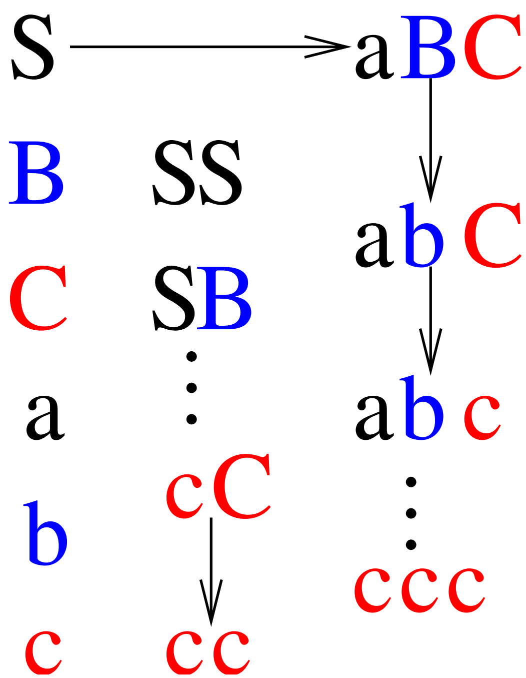
Въпрос: Защо този подход не работи за езици от тип 0?

# Пример

$abc \in L(G)$

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ ?

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to aSBC, \\
S &\to aBC, \\
CB &\to BC, \\
aB &\to ab, \\
bB &\to bb, \\
bC &\to bc, \\
cC &\to cc\}
\end{aligned}
$$



Оценяване на времето за изпълнение

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$
Въпрос: $w \in L(G)$?

Да разгледаме крайния граф $H = (U, E)$, където
$U = \{x \in (\Sigma \cup V)^* : |x| \leq |w|\}$ и
$E = \{(x, y) : x \Rightarrow_G y\}$.

Достижимостта е за време $\mathcal{O}(|U| + |V|)$.

Доминиращо е времето за построяването на графа.

$(|V| + |\Sigma|)^{|w|}$ възли (!)
$\times |w|$ възможни замествания
$\times |P|$ възможни изводи
$\times \mathcal{O}(|w|)$ време за проверка и заместване

# Синтактично (parse) дърво на извод (за тип 2)

Едно наредено дърво на извод, което описва (за тип 2) $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ независимо от ред на заместванията.

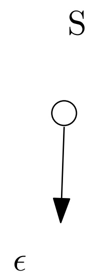
Конструкция на извода
$S = x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_n = x \in \Sigma^*$:
Корен $S$.
Ако на стъпка $i$ правим заместването $A \to z = z_1, \ldots, z_k$.
$\to$ възлите наследници на $A$ са $z_1$, ..., $z_k$.

Наблюдение: Листата са буквите на $x$.

# Синтактично дърво на извод

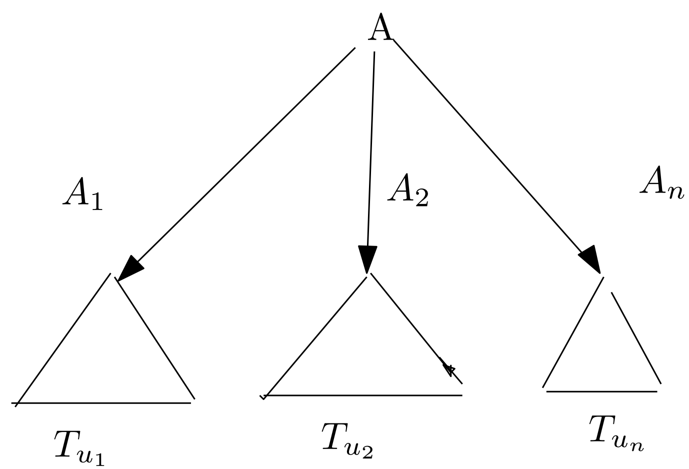
Дърво с резултат $a$


Дърво с резултат $\varepsilon$



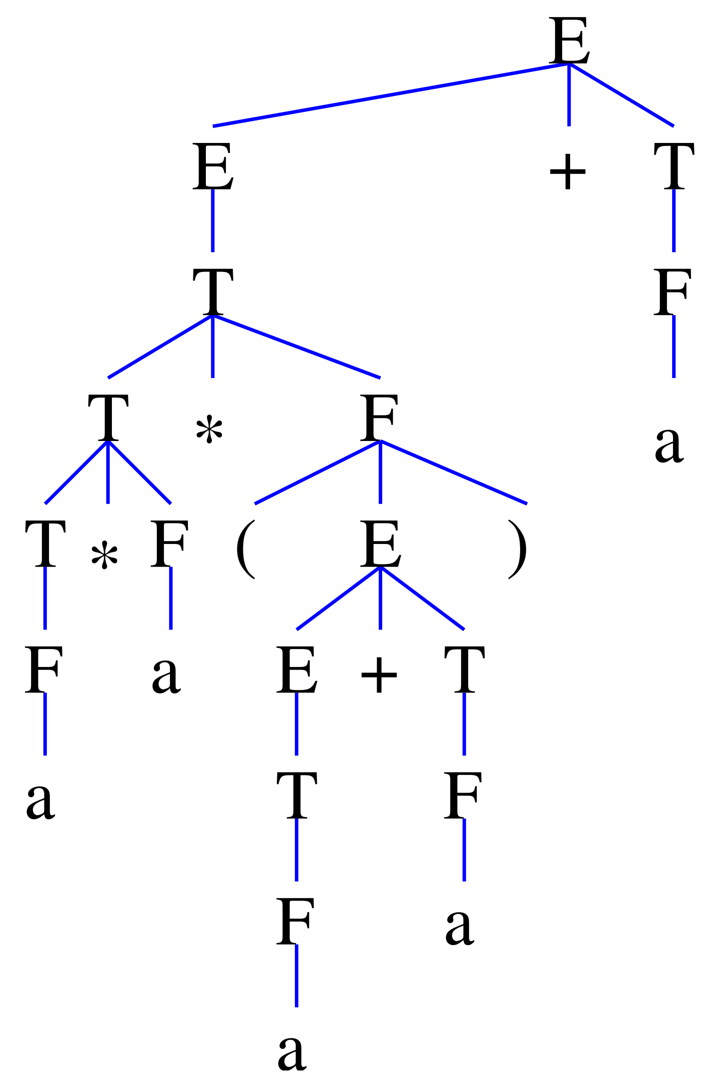

Дърво с резултат $u_1 u_2 \ldots u_n$

$A \to A_1 A_2 \ldots A_n$



## Пример

| | |
|---|---|
| $E \Rightarrow$ | $E \to E+T$ |
| $\Rightarrow E+T$ | $E \to T$ |
| $\Rightarrow T+T$ | $T \to T*F$ |
| $\Rightarrow T*F+T$ | $T \to T*F$ |
| $\Rightarrow T*F*F+T$ | $T \to F$ |
| $\Rightarrow F*F*F+T$ | $F \to a$ |
| $\Rightarrow a*F*F+T$ | $F \to a$ |
| $\Rightarrow a*a*F+T$ | $F \to (E)$ |
| $\Rightarrow a*a*(E)+T$ | $E \to E+T$ |
| $\Rightarrow a*a*(E+T)+T$ | $E \to T$ |
| $\Rightarrow a*a*(T+T)+T$ | $T \to F$ |
| $\Rightarrow a*a*(F+T)+T$ | $F \to a$ |
| $\Rightarrow a*a*(a+T)+T$ | $T \to F$ |
| $\Rightarrow a*a*(a+F)+T$ | $F \to a$ |
| $\Rightarrow a*a*(a+a)+T$ | $T \to F$ |
| $\Rightarrow a*a*(a+a)+F$ | $F \to a$ |
| $\Rightarrow a*a*(a+a)+a$ | |



# Най-ляв извод

На всяка стъпка в извода:

заместваме най-лявата променлива

Пример: от предната стр.

1-1 релация най-ляв извод $\leftrightarrow$ синтактично дърво

Наблюдение (Твърдение) (за тип 2)

$x \in L(G) \Leftrightarrow \exists$извод за $x$

$\Leftrightarrow \exists$ синтактично дърво за извода на $x$ по листата

$\Leftrightarrow \exists$ най-ляв извод за $x$

Задача: Дефинирайте най-десен извод със съответните свойства.

## Пример за нееднозначни изводи

$G = (\{E\}, \{a, +, *, (, )\}, P, E)$, където

$$
\begin{aligned}
P = \{ & E \to E + E,\\
& E \to E * E,\\
& E \to a,\\
& E \to (E)\}
\end{aligned}
$$