Упражнение 3 по Дискретни Структури, КН2, зимен семестър 2015-2016 г.

Релации

Казвайки “релация” без допълнителни уточнения, имаме предвид релация от вида $R \subseteq A \times A$. Когато казваме “крайна релация”, имаме предвид, че множеството е крайно. Казвайки “релация над A”, имаме предвид, че A е въпросното множество. Казвайки “релация над декартовия квадрат $A \times A$” имаме предвид същото нещо, а именно, че $R \subseteq A \times A$; а **не** че $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$. Фактът, че $a \in A$ и $b \in A$ са в релация бележим с “$(a, b) \in R$” или с по-краткия запис “aRb”.

Определение 1. *Нека R е релация над A. Нека домейните за a, b и c са A.*

- R *е* рефлексивна*, ако* $\forall a(aRa)$.
- R *е* антирефлексивна*, ако* $\forall a(\neg aRa)$.
- R *е* симетрична*, ако* $\forall a \forall b(aRb \to bRa)$.
- R *е* антисиметрична*, ако* $\forall a \forall b(aRb \wedge bRa \to a = b)$.
- R *е* силно антисиметрична*, ако* $\forall a \forall b\big(a \neq b \to ((aRb \wedge \neg bRa) \vee \neg(aRb \wedge bRa))\big)$.
- R *е* транзитивна*, ако* $\forall a \forall b \forall c(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Когато се каже, изследвайте релацията R за шестте свойства*, се разбира следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали R притежава това свойство, или не.* □

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува графът ѝ.

Задача 1. *Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$. Опишете в явен вид релацията R и по трите начина, ако R е дефинирана така: за всеки a и b от A, aRb тогава и само тогава, когато*

1. $a = b$
2. $a \neq b$
3. $a + b = 2$
4. $a * b = 2$
5. $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6. a *дели* b

7. a *и* b *са взаимно прости*†

Решение: Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

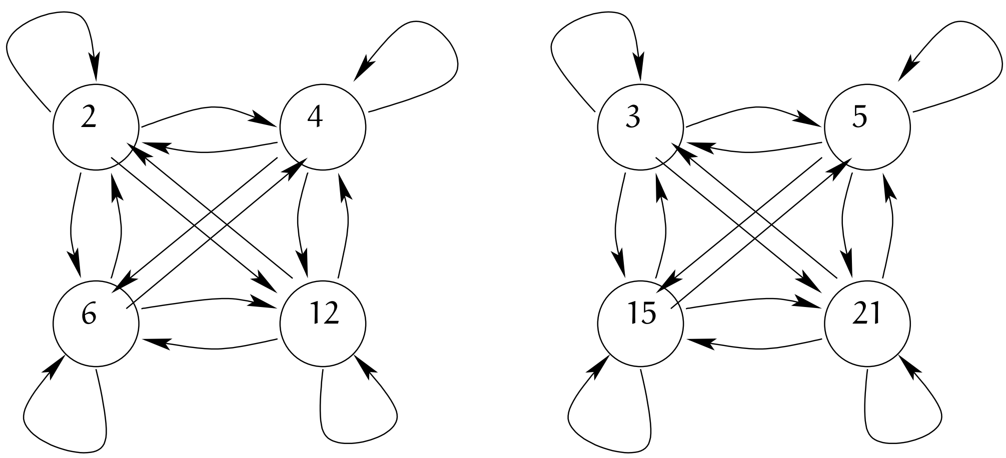
Първи начин

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,12),(3,3),(3,5),(3,15),(3,21),(4,2),(4,4),(4,6),(4,12),\\ (5,3),(5,5),(5,15),(5,21),(6,2),(6,4),(6,12),(12,2),(12,4),(12,6),(12,12),\\ (15,3),(15,5),(15,15),(15,21),(21,3),(21,5),(21,15),(21,21)\}$$

Втори начин (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

Трети начин



†Две естествени числа m и n, такива че $m \geq 2$ и $n \geq 2$, са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

Задача 2. *За всяка от релациите от предната задача, изследвайте релацията за шестте свойства.*

Решение: Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.
- Релацията е антирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.
- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число k, това число или е общ делител на две числа m и n, или не е. Дали казваме "на m и n" или "на n и m", няма значение.

  По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека $Q(m, n, k)$ е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, а на третата променлива е $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (тоест $\mathbb{N}^+$). Нека $Q(m, n, k)$ е истина тогава и само тогава, когато k е общ делител на m и n. Нека $P(m, n)$ е предикатът "m и n са взаимно прости" с домейни $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Предикатът $P(m, n)$ можем да изразим така:

  $$P(m, n): \quad \forall k(Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

  Тъй като $\forall m \forall n \forall k(Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$, то релацията е симетрична.
- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа x и y от дадените, такива че xRy и yRx, примерно 2 и 4.
- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).
- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

Определение 2. *Нека* $R \subseteq A \times B$ *е двуместна релация.* Обратната релация на R *е релацията* $R^{-1} = \{(a, b) \,|\, a \in B \wedge b \in A \wedge (b, a) \in R\}$. Релацията-допълнение на R *е релацията* $\overline{R} = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \notin R\}$. □

Задача 3. *Напишете всички елементи на релацията* $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*, дефинирана така:* $R = \{(a, b, c) \,|\, 0 < a < b < c < 5\}$.

Задача 4. *За всяка от следните дефиниции на релацията* $R \subseteq A \times B$*, намерете* R^{-1} *и* $\overline{R}$*. Символът "*$\mathbb{R}$*" означава множеството от реалните числа.*

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \,|\, a < b\}$.
2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \,|\, a$ *дели* $b\}$.
3. A *е множеството от държавите в Европа.* B *също е множеството от държавите в Европа.* $R = \{(a, b) \,|\, a$ *и* b *имат обща граница*$\}$.

Задача 5. *Нека* M *е матрицата на някаква релация* $R \subseteq A \times A$. *Нека* A *е крайно множество с* n *елемента. Нека* M *има точно* k *единици. Нека* M' *и* M'' *са съответно матриците на* R^{-1} *и* $\overline{R}$. *Колко единици има в* M'*? Колко единици има в* M''*?*

Задача 6. *Нека* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *и* $B = \{1, 2, 3\}$. *Нека* $R_1 \subseteq A \times B$ *и* $R_2 \subseteq A \times B$ *са такива, че* $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ *и* $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)(2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. *Намерете*

а) $R_1 \cup R_2$ *б)* $R_1 \cap R_2$ *в)* $R_1 \setminus R_2$ *г)* $R_2 \setminus R_1$ *д)* $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

Задача 7. *Нека* A *е множеството от студентите в някакъв университет. Нека* B *е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека* $R \subseteq A \times B$ *и* $R_2 \subseteq A \times B$ *са съответно релациите:*

$$R_1 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$$
$$R_2 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ е чел книга } b\text{, която е трябвало да прочете}\}$$

Опишете следните релации

а) $R_1 \cup R_2$ *б)* $R_1 \cap R_2$ *в)* $R_1 \triangle R_2$ *г)* $R_1 \setminus R_2$ *д)* $R_2 \setminus R_1$

Задача 8. *Нека* $R_> = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$. *Нека релациите* $R_\geq$, $R_<$, $R_\leq$, $R_=$, $R_\neq$ *са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:*

а) $R_> \cup R_<$ *б)* $R_> \cup R_=$ *в)* $R_\geq \cap R_\leq$ *г)* $R_> \setminus R_\geq$ *д)* $R_\geq \setminus R_>$
е) $R_< \cup R_=$ *ж)* $R_> \triangle R_<$ *з)* $R_> \triangle R_<$ *и)* $R_\geq \cup R_\leq$ *й)* $R_< \cup R_\neq$
к) $R_< \cap R_\neq$ *л)* $R_\leq \cap R_\neq$ *м)* $R_\leq \setminus R_\neq$ *н)* $R_\neq \setminus R_\leq$ *о)* $R_\geq \triangle R_\neq$ *п)* $R_< \triangle R_=$

Задача 9. *Напишете в явен вид (примерно, нарисувайки графа на релацията) всички релации над триелементно множество, които са антирефлексивни, антисиметрични и не са транзитивни.*

Задача 10. *Колко релации* $R \subseteq A \times A$, *където* A *е крайно множество с* n *елемента, са:*

1. *рефлексивни?*
2. *антирефлексивни?*
3. *симетрични?*
4. *антисиметрични?*
5. *силно антисиметрични?*
6. *симетрични и антисиметрични?*
7. *симетрични и силно антисиметрични?*
8. *симетрични и рефлексивни?*
9. *антисиметрични и нито рефлексивни, нито антирефлексивни?*
10. *антисиметрични и силно антисиметрични?*

Задача 11. *Колко транзитивни релации има над* n *елементно множество, ако*

1. $n = 1$
2. $n = 2$
3. *(*)* $n = 3$

Задача 12. *Нека* A *и* B *са крайни множества. Нека* A *има точно три елемента. Колко елемента има* B*, ако е известно, че има точно* 4096 *релации от вида* $R \subseteq A \times B$*?*

Упътване: $4096 = 2^{12}$.

Задача 13. *Следната теорема е* ***невярна****. Следователно, в "доказателството" ѝ има грешка/грешки. Открийте каква е грешката/какви са грешките в това "доказателство".*

Теорема 1 (**погрешна** теорема)**.** *Нека* R *е произволна релация над множество* A*. Нека* R *е симетрична и транзитивна. Тогава* R *е рефлексивна.*

Доказателство
Разглеждаме произволен $a \in A$. Нека b е произволен елемент от A, такъв че aRb. Тъй като R е симетрична, заключаваме, че bRa. Тъй като R е транзитивна и вече имаме $aRb \wedge bRa$, заключаваме, че aRa. Доказахме за произволен елемент, че той е в релация със себе си. □

Задача 14. *Докажете за произволна релация* R*, че* R *е симетрична тогава и само тогава, когато* $R = R^{-1}$.

Задача 15. *Докажете за произволна релация* $R \subseteq A \times A$*, че* R *е антисиметрична тогава и само тогава, когато* $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Задача 16. *Нека* S *е множеството от всички релации над* I_5*. Нека* $R \subseteq S \times S$ *е релация, дефинирана така:*

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че R *е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентост има* R*?*

Задача 17. *Нека за всяко естествено число* n*,* J_n *е множеството* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$*. Нека* $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$*. Нека* $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ *е релация, дефинирана така:*

$$R = \big\{\big((a, b), (c, d)\big) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \vee ad = bc\big\}$$

Колко елемента има R*? Напишете в явен вид* R *чрез матрицата ѝ. Докажете, че* R *е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на* R*?*

Задача 18. *Нека* $A = \{a, b, c, d\}$*. Нека* $R \subseteq A \times A$ *е релацията*

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Определете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на R.

Задача 19. *Нека* $A = \{a, b, c, d\}$*. Нека* $R \subseteq A \times A$ *и* $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$*. Определете минималната по брой елементи релация* $S \subseteq A \times A$*, такава че* $R \cup S$ *е релация на еквивалентност.*

Решение:
$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}$.

□

Задача 20. *Нека* $X = \{1, 2, 3, 4\}$. *Нека* $S \subseteq A \times A$ *и* $S = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4)\}$. *Определете минималната по мощност релация* $T \subseteq A \times A$, *такава че* $S \cup T$ *е релация на еквивалентност.*

Задача 21. *Нека* R *и* S *са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако* R *и* S *са транзитивни, то* $R \triangle S$ *е транзитивна.*

Решение:
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ и $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. Очевидно и двете релации са транзитивни. Но $R \vartriangle S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$ не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа (a, d). □

Задача 22. *Нека* Q *и* T *са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако* T *е антисиметрична, а* Q *е силно антисиметрична, то* $\overline{T \setminus Q}$ *е антисиметрична.*

Решение:
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $T = \{(a, b)\}$ и $Q = \{(a, b)\}$. Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно Q е силно антисиметрична. Но $T \setminus Q = \emptyset$, следователно $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$, която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа (a, b) и (b, a). □

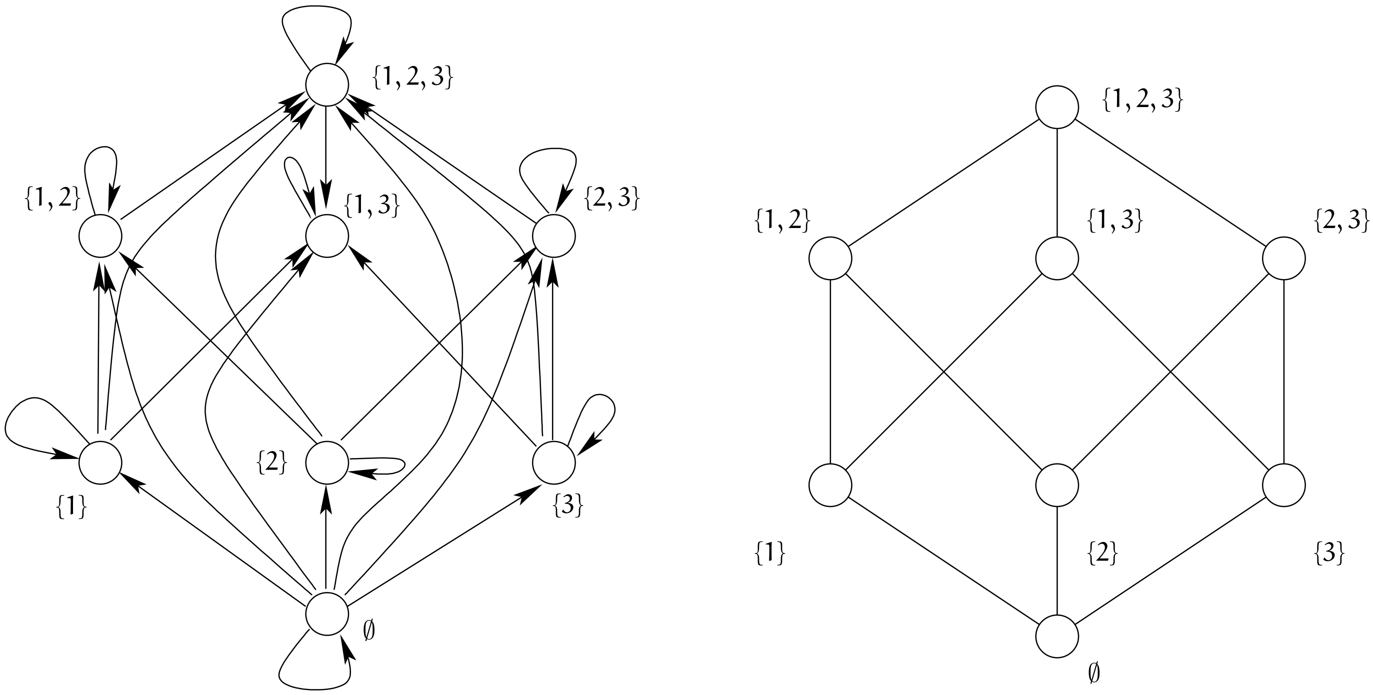
Определение 3. Релация на частична наредба $R \subseteq A \times A$ *е всяка релация, която е рефлексивна, антисиматрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко* $a \in A$ *и всяко* $b \in A$, a и b са сравними, *ако поне едно от* aRb *и* bRa *е изпълнено, и са* несравними *в противен случай.* Диаграма на Hasse *е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от графа на релацията:*

- *не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подрабзират;*
- *не се рисуват ребра от вида* (a, c), *ако вече* (a, b) *и* (b, c) *присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подрабзират;*
- *елементите се рисуват на ясно обособени нива. Прието е, минималните елементи да са най-долу, техните непосредствени съседи на следващото ниво нагоре и т. н., като максималните елементи са най-горе. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи долу и разполагаме другите нагоре, посоките на ребрата са отдолу нагоре.*

□

Като пример вижте релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$, изобразена на Фигура 1 веднъж с граф и веднъж с диаграма на Hasse. Очевидно, диаграмата на Hasse е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

Задача 23. *Нека* $A = \{a, b, c, d\}$. *Определете в явен вид всички релации на частична наредба над* A, *в които* a *и* b *са минимални, а* c *и* d *не са сравними.*



(а) Графът на релацията. (б) Диаграмата на Hasse.

Фигура 1: Графът и диаграмата на Hasse на релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$.

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

Решение:
Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).

Освен това, има нули в колоните на a и b (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като a и b са минимални (Фигура 3).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: a и b са минимални.

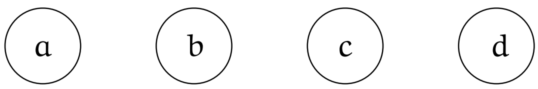
Освен това, има нули в клетките (c, d) и (d, c), тъй като c и d не са сравними (Фигура 4).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

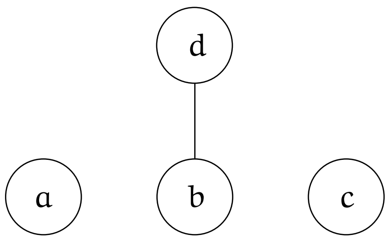
Фигура 4: c и d не са сравними.

Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по $2^4 = 16$ различни начина, всеки от който съответства на една от търсените релации:

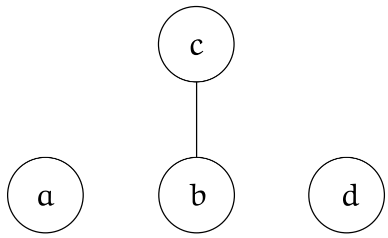
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



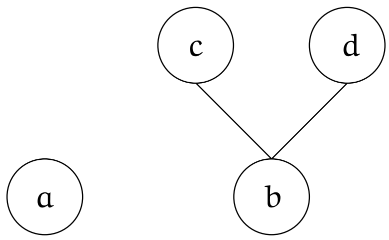
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



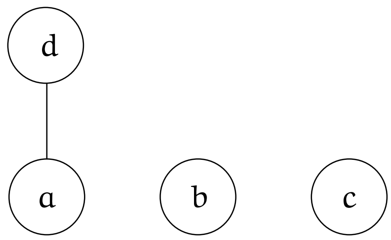
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



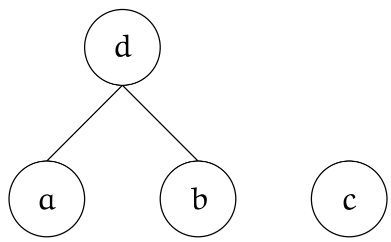
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



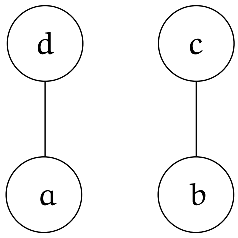
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



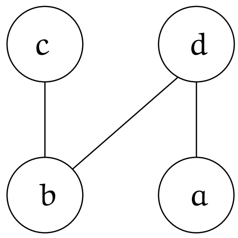
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



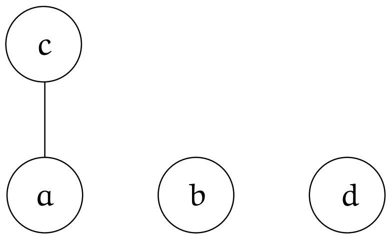
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



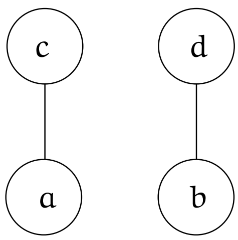
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



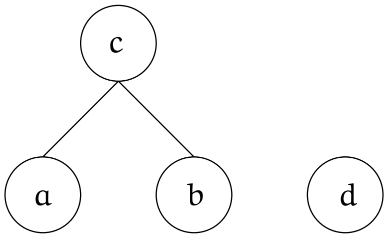
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



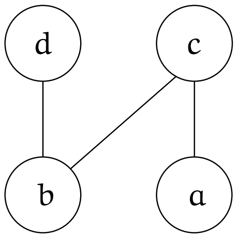
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



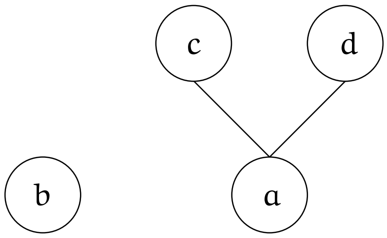
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



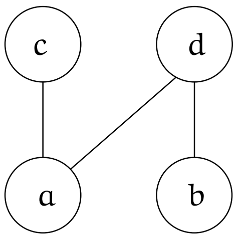
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



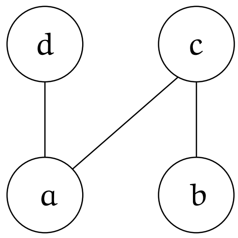
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



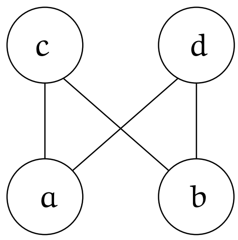
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



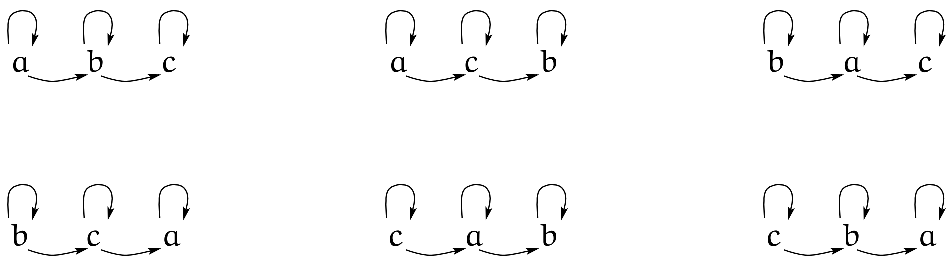
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



□

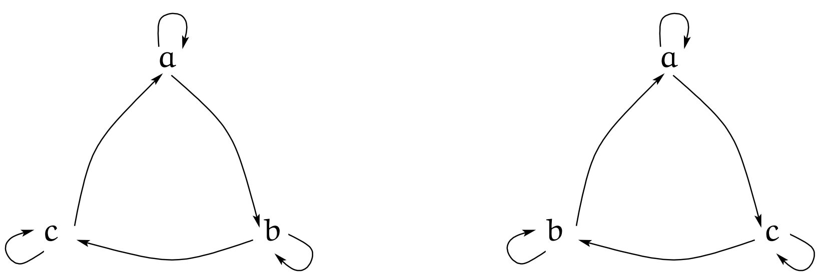
Задача 24. *Нека* $S = \{a, b, c\}$. *Напишете* в явен вид *всички релации* $R \subseteq S \times S$, *които са рефлексивни и антисиметрични и* не са *транзитивни. Приемат се само отговори, в които релациите са описани чрез булеви матрици.*

Решение:
Първо съобразяваме, че следните шест релации, описани чрез графи, са рефлексивни и антисиметрични, но не са транзитивни:



Че не са транзитивни, следва директно от дефиницията на транзитивност. Примерно, в първата посочена релация, би трябвало да има и стрелка от a до c.

Това обаче не са всички нетранзитивни, рефлексивни и антисиметрични, релации. Има още две:



Примерно, в първата от тях, щом a е в релация с b и b е в релация с c, би трябвало a да е в релация с c; също така би трябвало b да е в релация с a и c да е в релация с b.

Същите осем релации, написани с матрици (в същия ред, в който вече ги написахме с графи), са:

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c			1

	a	b	c
a	1		1
b		1	
c		1	1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c			1

	a	b	c
a	1		
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	
c	1		1

	a	b	c
a	1		
b	1	1	
c		1	1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c		1	1

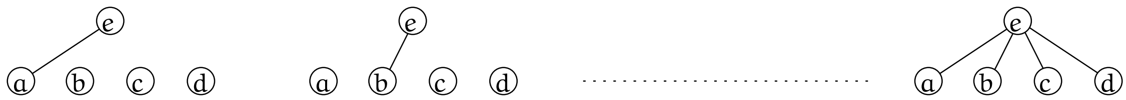
□

Задача 25. *Дадено е множество* $A = \{a, b, c, d, e\}$. *Напишете в явен вид всички релации на частична наредба над* A, *в които елементите* a, b *и* c *са минимални. Релациите може да пишете като множества от наредени двойки или чрез диаграми (графи) или чрез диаграми на Hasse.*

Решение: Ще използваме диаграми на Hasse.

А. Има точно една релация, в която и петте елемента са миминални:

Б. Има точно петнадесет релации, в които точно e не е минимален:



Аналогично, има точно петнадесет релации, в които точно d не е минимален. Общо има точно тридесет релации, в които точно четири елемента са минимални, като a, b и c са измежду минималните.

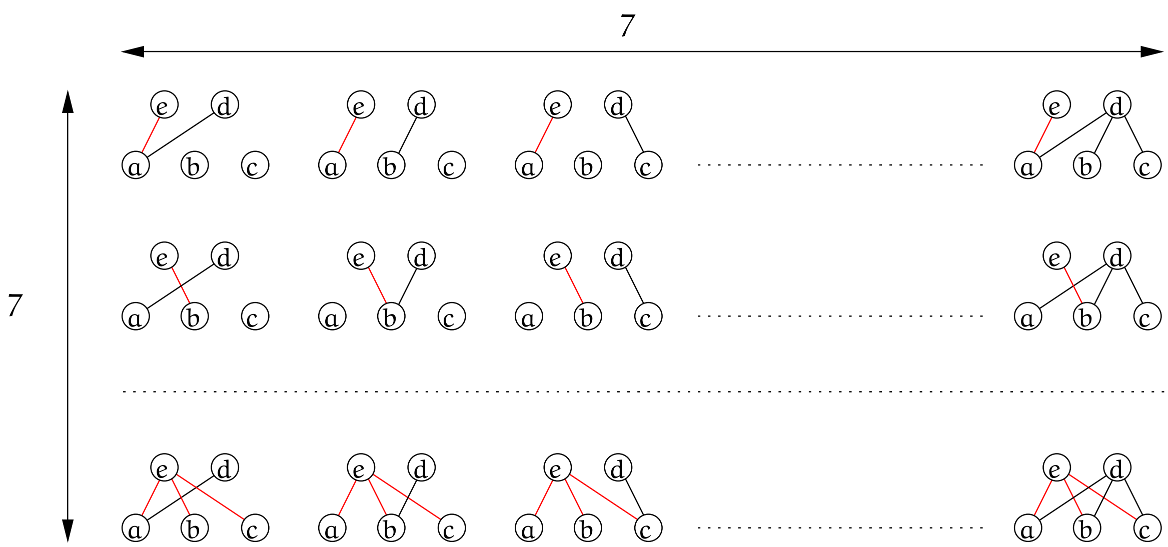
В. Да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални. Те се разбиват на тези, в които d и e не са сравними, и на тези, в които d и e са сравними.

В.1 Има точно $7 \times 7 = 49$ релации, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними. Причината е, че ако игнорираме d, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални:

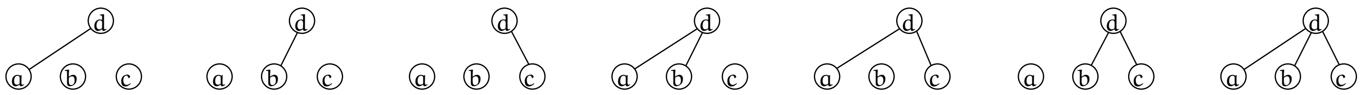
Да наречем множеството от тези релации, R_1. Аналогично, ако игнорираме e, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални.

Да наречем множеството от тях, R_2.

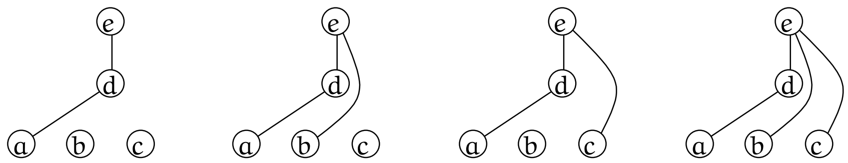
Всяка от релациите, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними, се получава чрез комбинирането на една релация от R_1 и една релация от R_2, като при комбинирането общите елементи (които са a, b и c) се идентифицират. Очевидно става дума за $7 \times 7 = 49$ релации:



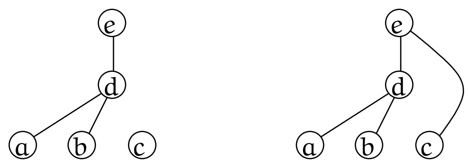
В.2 Сега да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални, а d и e са сравними. Първо ще разгледаме тези, в който d предхожда e. Те са 19 на брой, което получаваме със следните разсъждения. Има седем възможности за това, кои измежду a, b и c да предхождат d (e не е показан):



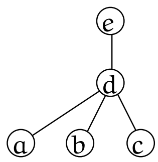
Елементът e може да бъде добавен по 4 начина към всяка от първите три възможности, примерно



Към всяка от вторите три възможности елементът e може да бъда добавен по два начина, примерно:



Към последната, седмата възможност, e може да бъде добавен по точно един начин:



И така, релациите, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и d предхожда e, са

$$4 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$

Очевидно тези релации, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и e предхожда d, са също 19. Общият брой на релациите в **В.2** е $19 + 19 = 38$. И общият брой на релациите в **В** е $49 + 38 = 87$.

Решението на задачата се получава чрез сумиране на подрешенията в **А**, **Б** и **В**, а именно

$$1 + 30 + 87 = 118$$

Това е броят на релациите, в които a, b и c са минимални.

Зад. 5 Дадено е крайно непразно множество A и релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така:

$$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \text{ тогава и само тогава, когато } |X| \leq |Y|.$$

Изследвайте R за шестте свойства на релации над Декартов квадрат. Това означава, за всяко от шестте свойства (стр. 12 в учебника), определете дали R притежава свойството, или не. И в двата случая обосновете добре отговорите си.

Решение: R е рефлексивна, понеже всяко подмножество на A има същата мощност като себе си, така че $|A| \leq |A|$ за всяко можество A. R не е антирефлексивна по същата причина. R не е симетрична, понеже ако две множества A и B е вярно, че $|A| \leq |B|$, от това не следва непременно, че $|B| \leq |A|$. R не е слабо антисиметрична, защото има двойки различни подмножества на A с една и съща мощност. R не е силно антисиметрична по същата причина. R е транзитивна, защото ако едно множество има мощност не по-голяма от мощността на друго множество, а другото, не по-голяма мощност от мощността на трето множество, то първото има не по-голяма мощност от мощността на третото.

Зад. 6 Дадени са две релации на еквивалентност $R_1 \subseteq A \times A$ и $R_2 \subseteq A \times A$ над крайно множество A. За всяка от следните три релации:

а) $R_1 \cap R_2$,

б) $R_1 \cup R_2$,

в) $R_1 \triangle R_2$

определете дали тя е релация на еквивалентност. Обосновете добре отговорите си.

Решение: $R_1 \cap R_2$ е релация на еквивалентност, което сега ще докажем.

- Щом R_1 и R_2 са рефлексивни, всяка от тях съдържа наредените двойки (a, a), по всички елементи $a \in A$. Тогава сечението им също съдържа всички тези двойки, тоест $\forall a \in A : (a, a) \in R_1 \cap R_2$. Следователно, сечението е рефлексивна релация.

- Да разгледаме произволни $a, b \in A$, такива че $a \neq b$. Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

  Случай 1 $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$.

  Случай 2 $(a, b) \notin R_1 \wedge (b, a) \notin R_1$.

  Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

  Случай 3 $(a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2$.

  Случай 4 $(a, b) \notin R_2 \wedge (b, a) \notin R_2$.

  Ако **Случай 1** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \in R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 1** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Тъй като тези комбинации от случаи са изчерпателни, то или и двете наредени двойки (a, b) и (b, a) са в сечението, или и двете не са. Следователно, сечението е симетрична релация.

- Да разгледаме произволни три елемента $a, b, c \in A$. Тъй като R_1 е транзитивна, то

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \rightarrow (a, c) \in R_1 \tag{1}$$

Аналогично,

$$(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \rightarrow (a, c) \in R_2 \tag{2}$$

Нека p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 са съжденията

– p_1: $(a, b) \in R_1$,
– q_1: $(b, c) \in R_1$,
– r_1: $(a, c) \in R_1$,
– p_2: $(a, b) \in R_2$,
– q_2: $(b, c) \in R_2$,
– r_2: $(a, c) \in R_2$.

Ако преведем (1) и (2) на езика на съждителната логика, (1) е

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \tag{3}$$

а (2) е

$$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \tag{4}$$

И двете са изпълнени, следователно в сила е тяхната конюнкция. Това, което искаме да докажем за $R_1 \cap R_2$, е а именно, че е транзитивна, на езика на съждителната логика е

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2) \tag{5}$$

Ще докажем, че импликацията

$$((p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_1)) \rightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2)) \tag{6}$$

е тавтология. Понеже броят на съжденията е 6, доказателство с таблица не е практично. Можем да разсъждаваме така: какво трябва да е изпълнено за съжденията в импликацията в (6), така че импликацията да е лъжа? Знаем, че импликация е лъжа тогава и само тогава, когато антецедентът е истина, а консеквентът е лъжа. Да видим кога консеквентът е лъжа. Прилагаме свойствата на импликацията (понеже самият консеквент е импликация) и законите на Де Морган към консеквента на (6) и получаваме, че е еквивалентен на

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee (r_1 \wedge r_2)$$

За да бъде лъжа, трябва p_1, p_2, q_1, q_2 да са истина, а поне едно от r_1 и r_2 е лъжа. Ако заместим съжденията в антецедента на (6) с тези логически стойности, ще получим, че

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \text{ или } p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \text{ е лъжа}$$

Но тогава и антецедентът е лъжа. Доказахме, че при единствената възможна стойност на съжденията, такава че консеквентът е лъжа, антецедентът също е лъжа. Следователно, при тези стойности на участващите прости съждения, цялата импликация в (6) е истина. Доказахме, че импликацията в (6) е истина за всички възможности за истина/лъжа на участващите прости съждения. Тоест, тя е тавтология.

Следователно, $R_1 \cap R_2$ е транзитивна.

$R_1 \cup R_2$ не е релация на еквивалентност. За да докажем това, достатъчно е да покажем две *конкретни* релации на еквивалентност R_1 и R_2, такива че обединението им не е релация на еквивалентност. Забележете разликата с предното доказателство: по отношение на него *не е* достатъчно да покажем, че за две конкретни релации на еквивалентност, тяхното сечение също е релация на еквивалентност! Причината е, че всъщност в тази задача доказваме твърдения от вида

> за всяка релация на еквивалентност R_1, за всяка релация на еквивалентност R_2, в сила е ...

Доказателството, че твърдението е вярно, не може да стане чрез разглеждане на конкретни релации, защото релациите на еквивалентност са безброй и няма как да проверим верността на твърдението с разглеждане на конкретни релации. Обаче доказателството, че твърдението не е вярно, може да стане чрез разглеждане на само две конкретни релации, за които твърдението е лъжа. Такава двойка релации се нарича *контрапример*. За да се убедим, че един контрапример е достатъчен, може да образуваме отрицанието на посоченото твърдение и да съобразим, че тогава двата универсални квантора стават екзистенциални.

И така, контпрапример е $A = \{a, b, c, d\}$,

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

и

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (d, d), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (d, a), (d, b)\}$$

Лесно се вижда, че обединението им не е релация на еквивалентост, защото не е транзитивна: тя съдържа (c, a) и (a, d), но не съдъжра (c, d).

$R_1 \triangle R_2$ също не е релация на еквивалентност. Контрапример е $A = \{a\}$ и $R_1 = \{(a, a)\}$, $R_2 = \{(a, a)\}$. Очевидно $R_1 \triangle R_2 = \emptyset$ не е рефлексивна.

Определение 4, Задача 26, Задача 27 и Задача 28 са материал **извън** материала за курса и са предназначени за студенти със специален интерес към дискретната математика.

Определение 4 (композиция на релация със себе си). *Нека* R *е релация над множество* A. *Релацията* $R \circ R$ *дефинираме така:*

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c \in A(aRc \wedge cRb)\}$$

Степените на релацията R *дефинираме така:*

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \; R^{n+1} &= R^n \circ R \end{aligned}$$

Релациите $R^1 = R$, R^2, R^3 *и т. н. се наричат* степените на R.

Задача 26. *Нека* $R \subseteq I_4 \times I_4$ *е дефинирана така:* $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. *Намерете* R^n *за* $n \in \mathbb{N}^+$.

Решение: Лесно се съобразява, че

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\} \\ R^2 &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\} \\ R^3 &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\} \\ R^4 &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\} \end{aligned}$$

Тъй като $R^4 = R^3$, очевидно че $R^5 = R^4$, $R^6 = R^5$, и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N}(n > 4 \rightarrow R^n = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\})$$

Накратко, решението е:

$$R^i = \begin{cases} \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}, & \text{ако } i = 1 \\ \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}, & \text{ако } i = 2 \\ \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}, & \text{ако } i \geq 3 \end{cases}$$

□

Задача 27. *Докажете, че за всяка релация* $A \subseteq A \times A$, R *е тразитивна тогава и само тогава, когато* $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Решение, част I: Нека R е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$. Базата е за $n = 1$: очевидно, $R^1 \subseteq R$. Да допуснем, че $R^n \subseteq R$. Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R$. Да разгледаме произволен елемент $(a, b) \in R^{n+1}$. Съгласно Определение 4, $\exists x \in A\big((a, x) \in R^n \wedge (x, b) \in R\big)$. От индуктивната хипотеза знаем, че $R^n \subseteq R$. Следователно, $(a, x) \in R$. Щом $(a, x) \in R$ и $(x, b) \in R$, то $(a, b) \in R$, тъй като R е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в R^{n+1}, то той е и в R.

Решение, част II: Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Ще докажем, че R е транзитивна. Тъй като $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$, в частност $R^2 \subseteq R$. Да разгледаме произволни елементи от A, да ги наречем a, b и c. Нека $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$. Съгласно Определение 4, изпълнено е $(a, c) \in R^2$. Но $R^2 \subseteq R$. Следователно, $(a, b) \in R$. □

Задача 28. *Докажете, че за всяка релация* $A \subseteq A \times A$, *ако* R *е рефлексивна и тразитивна, то* $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n = R)$.