Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, I поток, зимен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашните работи се предават на съответния асистент по време на упражненията през седмицата 04. – 06. януари 2016 г. (тринадесетата седмица от семестъра).

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*8*	*10*	*10*	*5*	*8×2*	*69*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. За всяка редица изведете формула за общия член и пресметнете a_{2015} и a_{2016}:

а) $a_1 = 2,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 3,\quad a_{n+3} = 16\,a_{n+2} - 85\,a_{n+1} + 150\,a_n$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

б) $a_0 = -35,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2n^2.5^n + 30.3^n - 12.5^n$ за $\forall n \geq 0$; **(4 точки)**

в) $a_1 = 9,\quad a_{n+1} = n^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ за $\forall n \geq 1$; **(5 точки)**

г) $a_1 = 52,\quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+n}$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

д) $a_1 = 1,\quad a_2 = 7,\quad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

е) $a_1 = 87,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$ за $\forall n \geq 1$. **(2 точки)**

Задача 2. Докажете, че числото $\left(4+\sqrt{7}\right)^{2015} + \left(4-\sqrt{7}\right)^{2015}$ е цяло, и намерете цифрата на единиците му.

Упътване: Представете това число като член на редица, зададена рекурентно.

Задача 3. По колко начина числата 1, 2, 3, ... , n могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от някое от числата вляво от него?

Упътване: Намерете (с доказателство) кои числа могат да стоят на последното място в редицата. Въз основа на това съставете рекурентно уравнение и го решете.

Задача 4. Нека т. O е центърът на правилния шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1. Освен страните на шестоъгълника са начертани още и отсечките, свързващи т. O с всеки от върховете. Така се получават общо дванайсет отсечки с дължина 1. Пресметнете броя на маршрутите с дължина 2015, всеки от които започва и завършва в т. O.

Упътване: Означете с a_n броя на маршрутите с дължина n, с начало и край точката O, а с b_n — броя на маршрутите с дължина n, с начало т. A и с край т. O. Съставете система от две линейни рекурентни уравнения и изключете b-тата.

Задача 5. Свързан планарен граф (без примки) има n върха и f области. Всички области имат по три ребра (включително външната, неограничената област). Докажете, че $f = 2n - 4$.

Задача 6. За посочения по-долу граф:
а) намерете кликовото число;
б) намерете върховото хроматично число;
в) намерете ребровото хроматично число;
г) постройте минимално покриващо дърво по алгоритъма на Крускал;
д) постройте минимално покриващо дърво по алгоритъма на Прим—Ярник от върха A;
е) постройте дървото на най-късите пътища от върха A до всички други върхове с помощта на алгоритъма на Дейкстра;
ж) постройте хамилтонов цикъл или докажете, че такъв не съществува;
з) постройте ойлерова верига или докажете, че такава не съществува.

Забележка: В подточките "г", "д" и "е" начертайте полученото дърво (само крайния резултат), а за междинните стъпки опишете само реда на включване на ребрата в дървото (не е нужно да правите чертеж за всяка междинна стъпка).